

# **ANÁLISE DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS DE CABOS PRÉ-ESFORÇADAS**

**JORGE ALEXANDRE DE MAGALHÃES LOURENÇO**

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de  
**MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL — ESPECIALIZAÇÃO EM ESTRUTURAS**

---

Orientador: Professor Doutor Álvaro Ferreira Marques Azevedo

JUNHO DE 2008

## **MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA CIVIL 2007/2008**

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Tel. +351-22-508 1901

Fax +351-22-508 1446

✉ [miec@fe.up.pt](mailto:miec@fe.up.pt)

*Editado por*

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Rua Dr. Roberto Frias

4200-465 PORTO

Portugal

Tel. +351-22-508 1400

Fax +351-22-508 1440

✉ [feup@fe.up.pt](mailto:feup@fe.up.pt)

🌐 <http://www.fe.up.pt>

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição que seja mencionado o Autor e feita referência a *Mestrado Integrado em Engenharia Civil - 2007/2008 - Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2008*.

As opiniões e informações incluídas neste documento representam unicamente o ponto de vista do respectivo Autor, não podendo o Editor aceitar qualquer responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões que possam existir.

Este documento foi produzido a partir de versão electrónica fornecida pelo respectivo Autor.

À minha mãe



## **AGRADECIMENTOS**

Após concluído este trabalho, agradeço a todas as pessoas que me influenciaram na sua concretização.

Ao Professor Álvaro Azevedo, agradeço todo o apoio e aconselhamento no decorrer desta dissertação, as informações e material fornecidas para a sua realização e a oportunidade de desenvolver este tema, permitindo desenvolver conhecimentos, numa área de meu grande interesse.

Ao Professor Mátyás Hunyadi, da Universidade de Budapest, agradeço toda a disponibilidade e esclarecimento de questões relativas ao programa de cálculo automático, que tiveram um contributo valioso na compreensão de todo o processo de análise e permitiram superar dificuldades iniciais.

Aos meus colegas de mestrado, pelas discussões sobre variados assuntos, que permitiram um melhoramento da dissertação.

À minha família e amigos por sempre me apoiarem.



## **RESUMO**

Este trabalho tem como objectivo a análise de vibrações em estruturas de cabos pré-esforçadas, dando particular destaque às pontes pedestres com cabos. São discutidos os principais aspectos a analisar relativamente a vibrações destas pontes, nomeadamente a nível de frequências verticais, horizontais e instabilidade aerodinâmica.

São referidos os diferentes tipos de estruturas com cabos, assim como os tipos de cabos e materiais.

É explicado o processo da análise estática e dinâmica linear e não linear, os métodos iterativos usados, os diferentes tipos de modelação do elemento cabo e os tipos de matriz de massa.

É elaborado um programa de cálculo automático, desenvolvido em Matlab, com o objectivo de avaliar as frequências e os modos de vibração para uma análise não linear geométrica. É explicada a estrutura do programa, assim como as subrotinas juntamente com o código.

São realizadas diferentes análises a estruturas, com o objectivo de verificar a viabilidade do programa, estudar o efeito produzido pelo pré-esforço nos deslocamentos e nas frequências de vibração, e analisar as alterações das características da estrutura, devido à análise não linear. As duas estruturas escolhidas para efectuar uma análise não linear e um estudo paramétrico foram uma ponte e um mastro atirantado.

**PALAVRAS-CHAVE:** cabos, pré-esforço, frequências, programa, análise não linear





## **ABSTRACT**

The objective of this thesis is the analysis of vibrations in structures with pre-stressed cables, with emphasis on pedestrian bridges with cables. The main aspects related to the vibration of those bridges, such as the vertical and horizontal frequencies and the aerodynamic instability, are analyzed.

Several types of cable structures are described, as well as some types of cables and materials.

The static and dynamic linear and nonlinear analyses processes, the iterative methods used, the different types of modulation of the cable and the mass matrix are described.

A computer code was developed in Matlab. Its objective is the calculation of the frequencies and modes of vibration in the context of a geometrical non linear analysis. The main structure of the program is explained, as well as the subroutines and the corresponding code.

Several types of analyses are made with the objective of verifying the reliability of the code, to study the influence of the pre-stress on the displacements and the frequencies of vibration, and to analyze the importance of the nonlinear behavior in the results of the structural analysis. In order to test the nonlinear analysis code with a parametric study, two structures were selected: a cable stayed bridge and a guyed mast.

**KEYWORDS:** cables, pre-stress, frequency, computer program, nonlinear analysis

## ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS .....	i
RESUMO .....	iii
ABSTRACT .....	v
 <b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	 1
1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS .....	1
1.2. OBJECTIVO E ESTRUTURA DO TRABALHO .....	1
 <b>2. ESTRUTURAS COM CABOS</b> .....	 3
2.1. INTRODUÇÃO .....	3
2.2. SISTEMAS ESTRUTURAIS COM CABOS .....	3
2.1.1. ESTRUTURAS SUSPENSAS .....	4
2.1.2. ESTRUTURAS ATIRANTADAS .....	4
2.3. TIPOS DE CABOS .....	5
 <b>3. ANÁLISE DINÂMICA DE PONTES PEDONAIS COM CABOS</b> .....	 7
3.1. INTRODUÇÃO .....	7
3.2. TIPOS DE PONTES PEDONAIS COM CABOS .....	8
3.3. ANÁLISE DINÂMICA DE PONTES PEDONAIS .....	9
3.3.1 ANÁLISE DINÂMICA DE PONTES STRESS-RIBBON .....	13
3.3.2 ANÁLISE DINÂMICA DE PONTES SUSPENSAS .....	17
3.3.3 ANÁLISE DINÂMICA DE PONTES ATIRANTADAS .....	20
 <b>4. ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA NÃO LINEAR</b> .....	 23
4.1. INTRODUÇÃO .....	23
4.2. MODELAÇÃO DE UM CABO .....	24
4.3. MATRIZ DE RIGIDEZ DO CABO .....	28
4.4. MÉTODOS ITERATIVOS .....	29
4.4.1 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON .....	29
4.4.2 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO .....	30

4.4.3 MÉTODO ITERATIVO DIRECTO .....	31
<b>4.5. ANÁLISE DINÂMICA .....</b>	<b>32</b>
<b>4.6. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DINÂMICO .....</b>	<b>33</b>
<b>4.7. MODOS DE VIBRAÇÃO E FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UM CABO .....</b>	<b>34</b>
<b>4.8. MATRIZ DE MASSA .....</b>	<b>34</b>
4.8.1. MATRIZ DE MASSA DIAGONAL .....	34
4.8.2. MATRIZ DE MASSA CONSISTENTE.....	35

## **5. PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO .....**

<b>5.1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>37</b>
<b>5.2. ESQUEMA GERAL DO PROGRAMA .....</b>	<b>37</b>
<b>5.3. CÓDIGO DO PROGRAMA.....</b>	<b>39</b>
5.3.1. IMPORTAÇÃO AUTOMÁTICA DOS DADOS INICIAIS .....	39
5.3.2. INÍCIO DO CICLO DE ANÁLISE ESTATÍCA .....	41
5.3.3. COMPRIMENTO DO ELEMENTO E MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO .....	41
5.3.4. DESLOCAMENTOS DO ELEMENTO E FORÇA INTERNA .....	42
5.3.5. MÓDULO DE ELASTICIDADE EQUIVALENTE .....	43
5.3.6. MATRIZ DE RIGIDEZ .....	44
5.3.7. FORÇAS INTERNAS .....	46
5.3.8. ANÁLISE GLOBAL .....	47
5.3.9. CRITÉRIO E MELHORIA DA CONVERGÊNCIA .....	48
5.3.10. MATRIZ DE MASSA .....	48
5.3.11. CÁLCULO DOS VALORES E VECTORES PRÓPRIOS.....	49
5.3.12. EXPORTAÇÃO DA DEFORMADA E DOS MODOS DE VIBRAÇÃO .....	49

## **6. VERIFICAÇÃO DO PROGRAMA E ANÁLISE DE RESULTADOS .....**

<b>6.1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>51</b>
<b>6.2. VERIFICAÇÃO DA VIABILIDADE DO PROGRAMA .....</b>	<b>51</b>
<b>6.3. ESTRUTURA DE 9 CABOS.....</b>	<b>55</b>
<b>6.4. PONTE ATIRANTADA .....</b>	<b>58</b>
6.4.1. ANÁLISE ESTATICA E DINÂMICA PARA CARGAS VERTICAIS .....	59
6.4.2. ANÁLISE ESTATICA E DINÂMICA PARA CARGAS DE PRÉ-ESFORÇO .....	61

6.4.3. ESTUDO PARAMÉTRICO DAS FREQUÊNCIAS.....	62
<b>6.5. MASTRO ATIRANTADO .....</b>	<b>64</b>
6.5.1. ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA COM VÁRIOS NÍVEIS DE PRÉ-ESFORÇO .....	64
6.5.2. COMPARAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS DE DIVERSAS SOLUÇÕES.....	68
 <b>7. SÍNTESE E CONCLUSÕES .....</b>	 <b>70</b>
7.1. SÍNTESE DO TRABALHO EFECTUADO.....	70
7.2. CONCLUSÕES.....	71
7.3. SUGESTÕES PARA FUTURO DESENVOLVIMENTO .....	71
 <b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	 <b>72</b>
 <b>ANEXOS</b>	



## ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 2.1 – Ponte Akashi-Kaikyō, Japão .....	4
Fig. 2.2 – Cobertura do Pavilhão de Portugal no Parque das Nações, Lisboa .....	4
Fig. 2.3 – Mastro atirantado .....	2
Fig. 2.4 - Viaduto de Millau, França .....	5
Fig. 2.5 – Diferentes tipos de cabos .....	6
Fig. 3.1 – a) principais tensões de uma barra, b) estrutura com cabo e em arco .....	7
Fig. 3.2 – Diferentes tipos de configurações numa ponte pedonal.....	8
Fig. 3.3 – Ponte tipo <i>stress-ribbon</i> em Ronneburg, Alemanha .....	8
Fig. 3.4 – Ponte suspensa em Ribeira de Pena, Portugal.....	9
Fig. 3.5 – Ponte atirantada.....	9
Fig. 3.6 – Limites da aceleração para as frequências verticais.....	11
Fig. 3.7 – Primeira frequência natural de varias pontes .....	12
Fig. 3.8 – Descrição do fenómeno de <i>flutter</i> por <i>vortex-shedding</i> .....	13
Fig. 3.9 – Descrição do fenómeno de <i>flutter</i> por excitação própria do tabuleiro .....	13
Fig. 3.10 – Ponte Grants Pass nos EUA e respectivo modelo de cálculo.....	14
Fig. 3.11 – Modos de vibração e frequências naturais da ponte Grants Pass.....	14
Fig. 3.12 – Ponte Maidstone no Reino Unido e respectivo modelo de cálculo.....	15
Fig. 3.13 – Modos de vibração e frequências naturais da ponte Maidstone.....	15
Fig. 3.14 – Representação dos 4 tipos de disposição dos cabos de pré-esforço .....	16
Fig. 3.15 – Ponte no lago Vranov e respectivo modelo de cálculo .....	17
Fig. 3.16 – Modos de vibração e frequências naturais da ponte no lago Vranov.....	17
Fig. 3.17 – Ponte do rio Willamette e respectivo modelo de cálculo .....	18
Fig. 3.18 - Modos de vibração e frequências da ponte do rio Willamette.....	18
Fig. 3.19 – Tipos de estruturas analisadas.....	19
Fig. 3.20 – Diferentes tipos de configurações para estudo paramétrico.....	20
Fig. 4.1 – Diagramas tensão-deformação.....	23
Fig. 4.2 – Características de um cabo.....	25
Fig. 4.3 – Modelação de um cabo por decomposição .....	26
Fig. 4.4 – Cabo sujeito ao peso próprio.....	27
Fig. 4.5 – Relação entre a variação do módulo de elasticidade e o comprimento do cabo .....	28
Fig. 4.6 – Graus de liberdade de um cabo .....	28

Fig. 4.7 – Método de Newton-Raphson.....	29
Fig. 4.8 – Uso do limitador dos deslocamentos.....	30
Fig. 4.9 – Método de Newton-Raphson modificado .....	31
Fig. 4.10 – Método iterativo directo .....	31
Fig. 4.11 – Resposta de uma estrutura em ressonância .....	32
Fig. 4.12 – Modos de vibração verticais naturais .....	34
Fig. 4.13 – Distribuição da massa de cada elemento.....	34
Fig. 4.14 – Matriz de massa para um elemento com 6 graus de liberdade.....	35
Fig. 5.1 – Sequência geral do programa de cálculo automático .....	39
Fig. 5.2 – Representação dos eixos globais e locais do elemento .....	41
Fig. 5.3 – Distribuição da matriz local para a matriz global.....	44
Fig. 5.4 – Modificação da matriz global.....	47
Fig. 6.1 – Representação da estrutura.....	52
Fig. 6.2 – Representação gráfica da geometria inicial.....	53
Fig. 6.3 – Comparação do 1º,2º e 3º modo entre o PCA e o AxisVM.....	54
Fig. 6.4 – Comparação do 4º,5º e 6º modo entre o PCA e o AxisVM.....	55
Fig. 6.5 – Representação da estrutura de 9 cabos.....	56
Fig. 6.6 – Deformada vista de frente para a carga de pré-esforço .....	57
Fig. 6.7 – Representação do 1º,3º e 5º modo de vibração .....	58
Fig. 6.8 - Relação da 1º frequência de vibração com a tensão nos cabos.....	58
Fig. 6.9 – Segmento do tabuleiro.....	59
Fig. 6.10 – Representação da ponte atirantada .....	59
Fig. 6.11 – Representação de parte da deformada para cargas verticais de 50kN (cm) .....	59
Fig. 6.12 – Modos de vibração verticais para a ponte atirantada .....	61
Fig. 6.13 – Modos de vibração da ponte atirantada.....	61
Fig. 6.14 – Geometria das diferentes soluções para a ponte atirantada .....	64
Fig. 6.15 – a) representação da estrutura b) segmento de 5m de altura.....	65
Fig. 6.16 – Representação da deformada do mastro para um valor de pré-esforço até 1400kN .....	66
Fig. 6.17 – Comparação entre a deformada linear e não a linear para um pré-esforço de 1500kN.....	67
Fig. 6.18 – Modos de vibração do mastro atirantado (Hz) .....	68
Fig. 6.19 – Diferentes soluções para o mastro atirantado.....	69





## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1 - Características de cabos.....	6
Tabela 3.1 – Frequências induzidas pelos peões em Hz.....	10
Tabela 3.2 – Frequências e modos de vibração naturais .....	16
Tabela 3.3 – Modos e frequências naturais para várias pontes suspensas.....	19
Tabela 3.4 – Frequências naturais correspondentes aos diversos tipos de modos de vibração .....	21
Tabela 5.1 – Dados iniciais da estrutura.....	40
Tabela 6.1 – Características dos elementos .....	51
Tabela 6.2 – Deslocamento vertical do nó 2 .....	52
Tabela 6.3 – Deslocamentos em cada iteração dos diversos métodos.....	53
Tabela 6.4 – Frequências em regime linear e não linear .....	53
Tabela 6.5 – Frequências lineares para o PCA e para o AxisVM (Hz) .....	54
Tabela 6.6 – Deslocamentos do nó 2 (mm) e frequências de vibração (Hz) .....	56
Tabela 6.7 – Frequências de vibração (Hz) .....	57
Tabela 6.8 – Deslocamentos verticais para diferentes cargas verticais (cm).....	60
Tabela 6.9 – Frequências de vibração para diferentes cargas aplicadas .....	60
Tabela 6.10 - Deslocamentos verticais para diferentes combinações de cargas.....	61
Tabela 6.11 – Frequências de vibração para diferentes combinações de cargas .....	62
Tabela 6.12 – Frequências para as diferentes soluções da ponte atirantada .....	64
Tabela 6.13 – Deslocamentos nos nós para diferentes valores do pré-esforço (cm) .....	66
Tabela 6.14 – Frequências para os diferentes valores do pré-esforços (Hz) .....	67
Tabela 6.15 – Frequências dos modos de vibração de cada solução .....	69

## SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

E - Módulo de elasticidade

A - Área da secção transversal

K – Matriz de rigidez

$\sigma$  – Tensão

$\rho$  – Peso volúmico

f – Frequência de vibração

a – Aceleração

$f_H$  – Frequência horizontal

$f_V$  – Frequência vertical

$f_S$  – Frequência transversal combinada com torção

$f_T$  – Frequência de torção

$E_{eq}$  – Modulo de elasticidade equivalente

L – Comprimento

$L_H$  – Comprimento horizontal

u – Deslocamento

M – Matriz de massa

c – Matriz de amortecimento

T – Matriz de transformação

P – Força de pré-esforço

Disp – Deslocamentos

w – Valor próprio

U – Vectores próprios

$\alpha$  – Coeficiente térmico de expansão

$\Delta T$  – Variação térmica

PCA – Programa de Cálculo Automático

## **INTRODUÇÃO**

### **1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS**

Através dos meios computacionais existentes, é possível analisar estruturas com relativa facilidade e com detalhe, sendo por vezes dada pouca importância aos métodos utilizados na obtenção dos resultados e mais relevância à maneira como estes são representados e à facilidade de os obter.

A crescente utilização de programas de cálculo automático na análise de estruturas levanta a questão da viabilidade e da precisão que estes oferecem ao utilizador. Os resultados obtidos variam de programa para programa, sendo necessário estudar o respectivo código para entender o funcionamento de cada um. Isto não é possível para a grande maioria, pois o código encontra-se inacessível. Sabendo que a diferença de resultados entre os programas aumenta para análises de estruturas mais complexas, torna-se mais difícil aceitar os resultados. É o caso da análise não linear de estruturas com cabos, onde os deslocamentos são usualmente de grandes dimensões, obtendo-se assim maiores discrepâncias entre a análise linear e a não linear.

A introdução de cabos em estruturas é realizada de modo a transferir as cargas principais para os cabos, ou apenas para melhorar a sua estabilidade, permitindo deste modo reduzir substancialmente o seu peso próprio. Esta redução é por vezes prejudicial, pois torna a estrutura mais vulnerável a oscilações, sendo necessário proceder a estudos mais detalhados do seu comportamento.

### **1.2. OBJECTIVO E ESTRUTURA DO TRABALHO**

No contexto da análise de vibrações em estruturas com cabos pré-esforçados, é elaborado nesta dissertação um programa de cálculo automático para esse fim. Este é explicado passo a passo, de modo a permitir uma fácil interpretação e compreensão do seu funcionamento.

O objectivo do programa criado é a obtenção das frequências e modos de vibração, para uma análise não linear de uma estrutura com cabos. Para tal, é considerada a alteração geométrica da estrutura quando sujeita a esforços, o pré-esforço aplicado nos cabos e a sua modelação.

No capítulo 2 procede-se a uma breve descrição dos diferentes tipos de estruturas com cabos, assim como os tipos de cabos.

Devido à grande importância do estudo de vibrações em pontes pedonais com cabos, no capítulo 3, são descritos os diferentes tipos de vibrações e é estudado o impacto da análise dinâmica nestas pontes. É efectuado um estudo paramétrico para três tipos de pontes pedonais com cabos, assim como a comparação das frequências obtidas com as frequências regulamentares.

No capítulo 4 é apresentada a análise estática e dinâmica não linear. Para modelar o elemento cabo, são explicados três métodos diferentes: este pode ser modelado como um elemento único com as características próprias do cabo; como um conjunto de elementos treliça; ou através de um módulo de elasticidade equivalente. São apresentados três métodos iterativos usados para a análise não linear geométrica: o de Newton-Raphson; o de Newton-Raphson modificado; e o iterativo directo. Estes métodos são usados pelo programa desenvolvido no âmbito desta. São descritos os diferentes tipos de matriz de massa e como obter as frequências e modos de vibração naturais de um cabo.

O programa de cálculo automático desenvolvido nesta dissertação é descrito no capítulo 5, sendo explicada a sequência de funcionamento do programa, assim como as suas subrotinas e todo o código necessário para a sua execução. O programa foi escrito na linguagem Matlab, de modo a facilitar a sua interpretação e compreensão.

No capítulo 6 são efectuados vários testes a diferentes estruturas, de modo a comprovar a viabilidade dos resultados obtidos pelo programa elaborado no âmbito desta dissertação, assim como compreender a influência da análise não linear e da acção do pré-esforço nos deslocamentos, nas frequências e nos modos de vibração da estrutura. É estudado o comportamento de uma ponte pedonal atirantada e de um mastro atirantado, para diferentes combinações de cargas verticais e de pré-esforço nos cabos. São efectuados estudos paramétricos para estas duas estruturas, de modo a compreender a influência das configurações dos cabos nas frequências de vibração.

O último capítulo serve de conclusão ao trabalho realizado, explicando os seus aspectos mais relevantes e possíveis alterações ou futuros desenvolvimentos.

# 2

## ESTRUTURAS COM CABOS

### 2.1. INTRODUÇÃO

As estruturas com cabos apresentam uma solução interessante para o engenheiro estrutural ao serem ao mesmo tempo muito esbeltas e resistentes. Estas estruturas são usadas para resistir aos principais esforços do sistema, como no caso de coberturas e pontes suspensas por cabos, e também usadas para restringir os movimentos de certas estruturas e aumentar a sua rigidez, como no caso de torres e plataformas no oceano.

Na procura de estruturas cada vez mais leves e económicas optimiza-se o sistema estrutural para o seu uso específico, permitindo assim ultrapassar limites alcançados e superar obstáculos cada vez mais difíceis. No entanto, à medida que as estruturas evoluem e se tornam mais complexas, surgem novos problemas estruturais, sendo assim cada vez mais importante o estudo destes sistemas. As estruturas de cabos inserem-se particularmente bem nestes estudos, pois por um lado permitem a construção de estruturas esbeltas de grandes dimensões e por outro apresentam um comportamento não linear muito acentuado que requer análises mais complexas.

Estruturas de cabos como as pontes suspensas e atirantadas, têm sido muito popularizadas por serem soluções economicamente viáveis e esteticamente atraentes para superar grandes vãos, incentivando assim o estudo de diferentes soluções e os seus comportamentos. Estes estudos desenvolvidos nas estruturas com cabos promovem a construção destes sistemas. No entanto, estas soluções muitas vezes não são consideradas devido à escassez de informação para o seu dimensionamento. Isto deve-se em parte ao facto dos projectistas não terem os conhecimentos necessários, à carência de software informático adequado de análise não linear, como também, à inexperiência de execução por parte das empresas de construção.

### 2.2. SISTEMAS ESTRUTURAIS COM CABOS

Os cabos são ideais para suportar as principais cargas duma estrutura, pois resistem a grandes esforços. Apesar de só suportarem tracções, permitem facilmente a transferência dos seus esforços para peças destinadas a resistir à compressão, como pilares de betão armado. O exemplo deste tipo de funcionamento pode ser encontrado em pontes e coberturas suspensas.

Outro tipo de estruturas com cabos é a atirantada, em que o cabo deixa de ser o elemento que resiste às cargas principais, e torna-se um suporte intermédio que aumenta a rigidez da estrutura. Como no caso de pontes e coberturas atirantadas, ou no caso de servir de estabilizador para determinadas acções em estruturas como torres e mastros atirantados.

### 2.2.1 ESTRUTURAS SUSPENSAS

A ponte suspensa tem permitido ao longo dos tempos a ligação entre cidades e países, que por outros meios seria muito dispendiosa ou difícil. Estas pontes apresentam grandes vantagens, como o de permitirem vãos de grande comprimento, necessitarem de poucos materiais para a sua construção e resistirem melhor a movimentos sísmicos do que outros tipos de estruturas. Mas também apresentam desvantagens como o aumento de instabilidade no tabuleiro, pois ao ser mais esbelto é mais susceptível a acções como a do vento.

O conceito do sistema estrutural destas pontes é bastante simples. Os cabos resistem às cargas principais e transmitem-nas aos pilares, conseguindo atingir vãos de quase 2 km, como a ponte Akashi-Kaikyō no Japão (fig. 2.1).



Fig. 2.1 – Ponte Akashi-Kaikyō, Japão

Os cabos são normalmente usados na criação de uma cobertura, permitindo grandes comprimentos para uma estrutura leve e relativamente rígida, considerando o material necessário. O peso da cobertura é transmitido pelos cabos aos pilares como se vê na fig. 2.2. Neste caso a cobertura é uma laje de betão armada curvada, com cabos pré-esforçados, cobrindo uma área de 65 por 50 m.



Fig. 2.2 – Cobertura do Pavilhão de Portugal no Parque das Nações, Lisboa

### 2.2.2 ESTRUTURAS ATIRANTADAS

Estruturas como a torre de rádio de Varsóvia na Polónia, que atingiu uma altura de 646 m, apresentam pouca resistência a esforços laterais, que por muito pequenos que sejam, provocam grandes momentos

na base. Para controlar esses esforços laterais é necessário o uso de cabos, como representado na fig. 2.3, para dar rigidez à estrutura e reduzir o efeito do vento na estrutura principal. Sem o uso de cabos seria extremamente dispendioso criar uma estrutura deste tipo com rigidez suficiente.

Outras estruturas semelhantes são as plataformas no oceano, que resistem a grandes esforços devido ao equipamento pesado da plataforma e a situações de tempestades extremas. Para suportar tais esforços é necessário ligar os cabos do fundo do oceano à plataforma. Torna-se imperativo estudar o comportamento não linear devido à escala da estrutura e à sua complexidade, pois exige-se a esta que aumente de rigidez à medida que surgem deslocamentos.

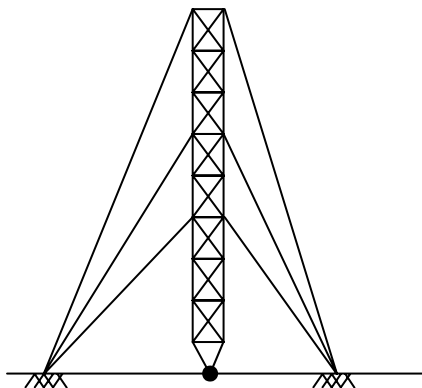


Fig. 2.3 – Mastro atirantado

As pontes atirantadas são usualmente utilizadas para vãos centrais na ordem dos 150 a 330 m, e ao contrário da maioria das pontes suspensas provocam esforços axiais nos tabuleiros devido à inclinação dos cabos, sendo necessário nos grandes vãos aumentar a resistência do tabuleiro ou aumentar a altura do pilar. Na fig. 2.4 está o Viaduto de Millau em França, com 2.46 km de comprimento.



Fig. 2.4 - Viaduto de Millau, França

### 2.3. TIPOS DE CABOS

Os cabos são elementos destinados a resistir apenas a forças de tracção, existindo diferentes tipos, com resistências e formatos diferentes, para se ajustarem às funções que lhes são destinadas. São constituídos por fios de diferentes materiais, normalmente aço, que apresentam uma secção circular de 3 a 8 mm de diâmetro, com excepção aos chamados *locked coil strands*. A grande resistência dos

cabos é conseguida por processos chamados *cold drawing* ou *cold rolling* [6]. Existem diferentes tipos de disposição dos cabos, os quais se podem encontrar em catálogos dos seus fabricantes, como por exemplo: BRIDON e PFEIFER.

As principais características dos cabos são o seu módulo de elasticidade elevado e constante, a facilidade de instalação e manuseamento, a elevada resistência à tracção, bem como o peso e custo reduzidos.

A disposição em espiral dos fios constituintes dos cabos (fig. 2.5 (a)) aumenta a sua flexibilidade, permitindo assim um manuseamento mais fácil. No caso das pontes suspensas o uso de cabos com fios paralelos é preferível devido à maior rigidez e resistência.

Os *locked coil strands* (fig. 2.5 (b)) são constituídos por fios normais dispostos em espiral no núcleo e com outros em forma de Z, que encostam uns aos outros na camada exterior. Com esta configuração obtém-se um cabo com mais resistência à corrosão e com menos vazios no interior, logo mais compacto.

Na fig. 2.5 (c) está representado um cabo constituído por cordões de fios dispostos em espiral.

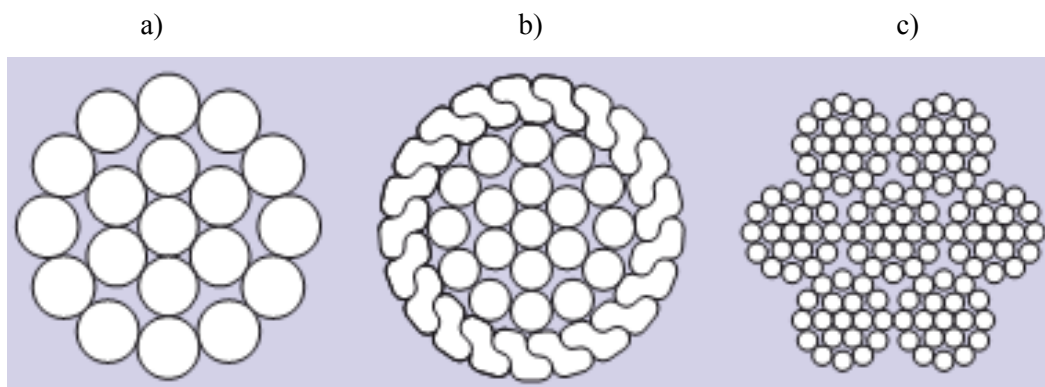


Fig. 2.5 – Diferentes tipos de cabos [7]

Os cabos normalmente utilizados têm uma tensão máxima superior a 1570 MPa, variando com a configuração. Os cabos com fio em espiral resistem a tensões superiores relativamente aos *locked coil strands*, sendo as tensões mínimas de resistência cerca de 1600 MPa e 1400 MPa, respectivamente.

A tensão máxima dos cabos altera-se muito com o tipo de material e a sua configuração. Na tabela 2.1 compara-se a tensão máxima, o peso volúmico e o módulo de elasticidade para cabos de diferentes materiais.

Tabela 2.1 - Características de cabos [2]

	$\sigma$ ( $10^6$ N/m <sup>2</sup> )	$\rho$ ( $10^3$ kgf/m <sup>3</sup> )	E ( $10^9$ N/m <sup>2</sup> )
<b>Aço</b>	1860	7.9	200
<b>Fibra de vidro</b>	1700	2.1	50
<b>Fibra de carbono</b>	2400 a 5650	1.7	140 a 531
<b>Fibra de aramíde</b>	2000	1.5	70



## 3

## ANÁLISE DINÂMICA DE PONTES PEDONAIIS COM CABOS

### 3.1. INTRODUÇÃO

O tipo de estrutura escolhida para ser analisada no âmbito desta dissertação foi a ponte pedonal com cabos. Este tipo de estrutura foi escolhido devido à crescente utilização de cabos em pontes pedonais e à grande importância que a análise dinâmica desempenha na sua elaboração e manutenção, sendo normalmente o factor condicionante.

As pontes pedonais devem ser leves e esbeltas, o que nalguns casos conduz a uma exagerada diminuição da rigidez, principalmente quando a estrutura é constituída por cabos. Nestas circunstâncias a ponte é facilmente influenciada por excitações devido aos peões que a utilizam, tornando-se assim mais difícil o controlo das vibrações de modo a proporcionar conforto e uma sensação de segurança aos utilizadores.

A melhor maneira de otimizar uma ponte é criando uma estrutura que apresente um formato coincidente com a direcção dos esforços internos, sendo normalmente estas estruturas as mais simples, eficazes e económicas. Observando a fig. 3.1(a), onde se encontram representadas as trajectórias principais de tensões numa barra simplesmente apoiada com uma carga uniformemente distribuída, percebe-se porque é que as estruturas mais simples como as suspensas ou em arco são as mais económicas. Isto deve-se ao facto da barra ter muito material que não contribui para a sua resistência, pois as tensões máximas estão concentradas apenas a meio vão nas fibras superiores e inferiores, enquanto que na fig. 3.1(b) a estrutura em arco e a suspensa encontram-se à compressão e à tracção respectivamente, com uma tensão uniforme em toda a sua extensão. A principal diferença é que para este tipo de estrutura surgem grandes esforços horizontais nos apoios, que no caso das estruturas suspensas com cabos implica a construção de ancoragens dispendiosas.

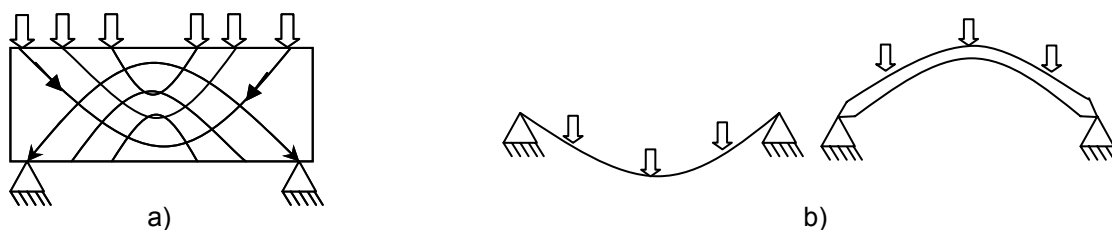


Fig. 3.1 – a) Principais tensões de uma barra, b) estrutura com cabo e em arco

### 3.2. TIPOS DE PONTES PEDONAIAS COM CABOS

O formato mais natural de uma estrutura de cabos (fig. 3.1 b)) apresenta bastante instabilidade no que respeita ao seu formato, pois uma força aplicada a meio vão causa uma deformada muito significativa. E visto que uma ponte pedonal tem de ter uma rigidez suficiente para conseguir manter a sua geometria e garantir conforto aos peões, é necessário alterar o seu formato e adicionar mais elementos. A estabilidade da estrutura pode ser aumentada de diversas maneiras, como por exemplo através da adição de uma carga distribuída (fig. 3.2 a)), da adição de mais cabos (fig. 3.2 b)), da criação de uma laje pré-esforçada de betão (fig. 3.2 c)), ou da adição de um tabuleiro de betão suspenso ou atirantado (fig. 3.2 d),e)).

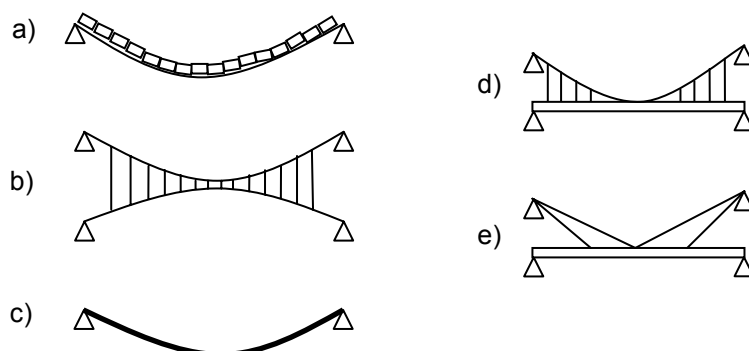


Fig. 3.2 – Diferentes tipos de configurações duma ponte pedonal

As pontes pedonais chamadas *stress-ribbon* (fig. 3.3) apresentam uma forma conferida pelo seu peso próprio, sendo normalmente uma catenária. A geometria destas pontes está relacionada com a carga permanente que provoca uma força axial constante ao longo do tabuleiro, e a sua geometria é dimensionada para não provocar forças horizontais nem momentos nos apoios intermédios.

O tabuleiro pode ser construído como uma peça única ou pela assemblagem de vários segmentos pré-fabricados que são suspensos em cabos. Após a construção do tabuleiro é aplicada uma força nos cabos para atribuir à estrutura a sua forma para a carga permanente. Esta força depende de factores como a inclinação máxima do tabuleiro ou a flecha máxima e devido a ser uma força muito elevada é necessário construir uns apoios muito resistentes com base em ancoragens ao solo.



Fig. 3.3 – Ponte tipo stress-ribbon em Ronneburg, Alemanha [13]

Nas pontes suspensas (fig. 3.4) o tabuleiro é suspenso de cabos que se encontram ligados aos pilares, conseguindo-se assim obter vãos bastante superiores em relação aos outros tipos de pontes. Existe um equilíbrio de forças na estrutura que garante que os esforços para a carga permanente sejam apenas axiais. Os cabos transmitem os seus esforços axiais para os pilares e para as ancoragens no solo ou no tabuleiro.



Fig. 3.4 – Ponte suspensa em Ribeira de Pena, Portugal [13]

As pontes atirantadas (fig. 3.5) têm os cabos ligados directamente do pilar ao tabuleiro, usando por vezes ancoragens no solo, mas o mais comum é o equilíbrio de forças através da simetria da estrutura, em que o tabuleiro se encontra comprimido e o peso dos dois lados da ponte são equilibrados no pilar central. Neste caso os cabos não apresentam uma forma curva, ao contrário das pontes suspensas, podendo ser considerados para pequenos comprimentos como treliças de barras rectas.



Fig. 3.5 – Ponte atirantada [13]

### 3.3. ANÁLISE DINÂMICA DE PONTES PEDONAIIS

O problema principal de vibrações nas pontes pedonais é devido à acção provocada pelos peões, à medida que estes se deslocam nesta a um determinado ritmo. A frequência vertical desta acção é em média 2 Hz, com um desvio padrão de 0.175 Hz, isto é, 50% dos peões andam a um ritmo entre 1.9 Hz e 2.1 Hz, e 95% andam entre 1.65 Hz e 2.35 Hz. Caso os peões estejam a correr, a frequência usualmente não é superior a 3.5 Hz, como descrito na tabela 3.1. [3]

Tabela 3.1 – Frequências induzidas pelos peões em Hz [8].

	Intervalo total	Lento	Normal	Rápido
<b>Caminhar</b>	1.4-2.4	1.4-1.7	1.7-2.2	2.2-2.4
<b>Correr</b>	1.9-3.3	1.9-2.2	2.2-2.7	2.7-3.3
<b>Saltar</b>	1.3-3.4	1.3-1.9	1.9-3.0	3.0-3.4

A aceleração vertical é um parâmetro aconselhado para avaliar o grau de vibração ao qual os peões estão sujeitos. Na fig. 3.6 estão representadas as acelerações máximas aceitáveis para diferentes regulamentos relativamente à primeira frequência vertical. Os limites de aceleração impostos pelas normas britânicas (BS5400) são definidos pela função (3.1), onde  $f_0$  é a primeira frequência natural vertical da ponte quando esta não se encontra carregada.

$$a_{lim} = 0.5\sqrt{f_0} \text{ (m/s}^2\text{, Hz)} \quad (3.1)$$

Os limites adoptados pelo regulamento canadiano *Ontario Bridge Code* e por Kabori são semelhantes às recomendações das normas britânicas. Nestes códigos, os valores limite da aceleração variam com a frequência aumentando sempre com esta, enquanto que no código ISO a aceleração não aumenta com a frequência, isto, porque ao contrário das outras curvas na fig. 3.6, a curva do código ISO foi determinada através de testes com os peões em pé parados [4].

A resposta da estrutura a forças dinâmicas depende de factores como a rigidez, amortecimento e a frequência natural da estrutura. A aceleração deve ser calculada durante a fase de projecto ou medida na ponte para verificar a segurança da estrutura devido às vibrações. O código britânico e o *Ontario Bridge Code* têm regras semelhantes para este assunto, nas quais a aceleração vertical máxima é calculada através da representação da força provocada por um peão, que corresponde a uma força dinâmica  $F$  (3.2) que se move na ponte a uma velocidade  $v=0.9f_0$  (m/s) ao longo do tempo  $t$ . Essa força tem uma frequência  $f_0$  (ritmo de andamento do peão) que corresponde à frequência natural da ponte. Na equação (3.2) o valor 180 corresponde à amplitude do primeiro harmónico da carga, sendo o produto do peso do peão (assumido 700 N) pelo factor de carga dinâmica,  $\alpha=0.257$  [4].

$$F(t) = 180\sin(2\pi f_0 t) \quad (3.2)$$

A aceleração dada pelo código britânico BS5400 é calculada com a expressão (3.3) e a aceleração dada pelo *Ontario Bridge Code* (ONT 83) é dado por (3.4).

$$a = 0.5f_0^{0.5} \quad (3.3)$$

$$a = 0.25f_0^{0.78} \quad (3.4)$$

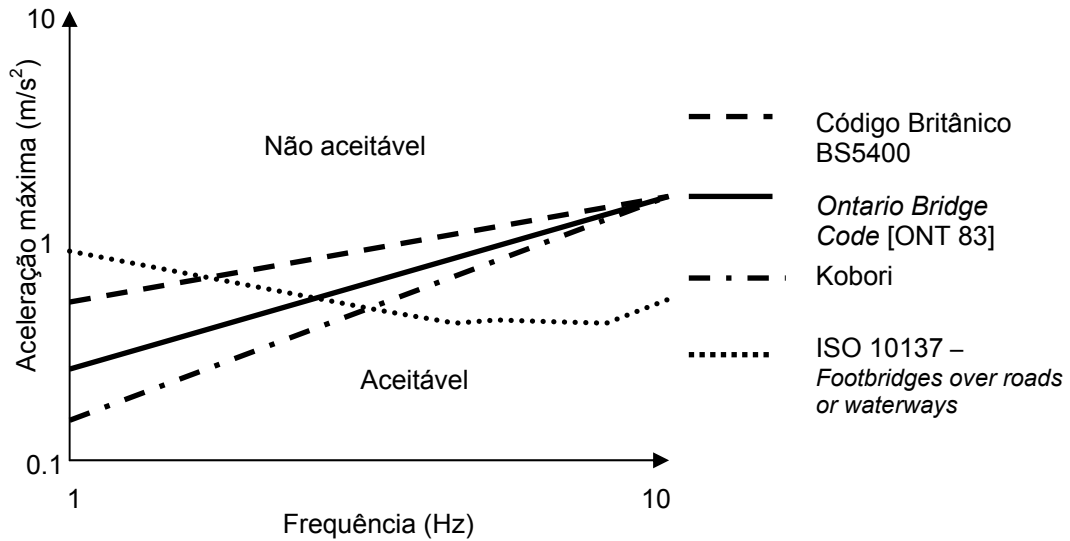


Fig. 3.6 – Limites da aceleração para as frequências verticais [4]

Outra maneira de analisar as pontes pedonais sem ser pelo parâmetro da aceleração é através da frequência natural da ponte, como adoptado pelo *Comite Euro-Internacional du Beton* e pelo código Suíço. Nestes códigos é aconselhado que seja evitado construir pontes com frequências naturais entre 1.6 Hz e 2.4 Hz e também entre 3.5 Hz e 4.5 Hz, isto porque as pontes dentro destas frequências estão mais sujeitas a problemas de ressonância. Estes limites são adiante comparados com as frequências naturais calculadas pelo programa desenvolvido nesta dissertação, para a ponte pedonal atirantada analisada no capítulo 6.3.

O critério sugerido por Allen tem base nas equações propostas por Rainer e as curvas limite do código ISO, e estabelece uma frequência mínima ( $f_0$ ) aceitável para as pontes pedonais, dependendo do peso ( $W$ ) e do coeficiente de amortecimento ( $\beta$ ) (3.5) [4].

$$f_0 \geq 2.86 \ln \left( \frac{8}{\beta W} \right) \quad (3.5)$$

Na fig. 3.7 está representada a primeira frequência natural de 67 pontes pedonais em diferentes locais do mundo, e a sombreado está o intervalo da frequência natural entre 1.6 Hz e 2.4 Hz. Com estes dados foi possível efectuar uma regressão para relacionar a primeira frequência natural com o comprimento da ponte (3.6) [3].

$$f_0 = 33.6 L^{-0.73} \quad (3.6)$$

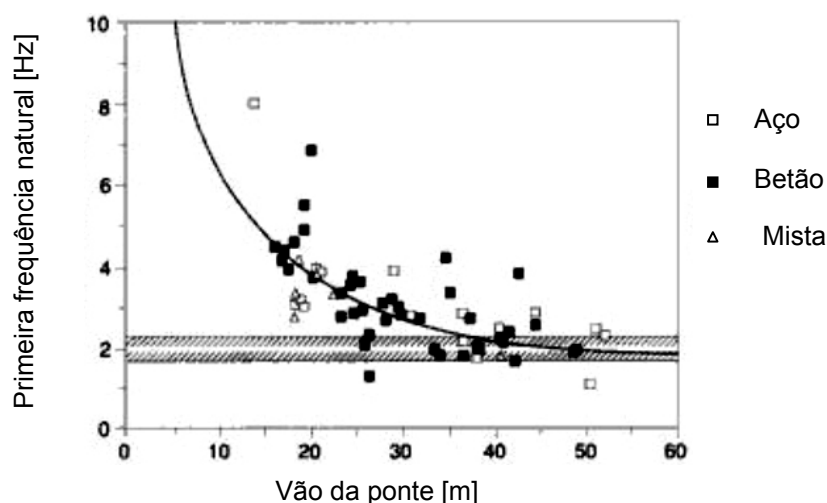


Fig. 3.7 – Primeira frequência natural de várias pontes [3]

A excitação horizontal também deve ser considerada na análise dinâmica, porque em cada passo dado pelo peão existe uma força horizontal que varia lateralmente, sendo aconselhado evitar pontes pedonais em que a frequência horizontal seja metade da vertical. Apesar das forças horizontais serem pequenas em relação às verticais, estas são capazes de produzir grandes vibrações em estruturas com pouca rigidez horizontal, isto porque os peões tendem facilmente a acertar o passo para coincidir com a frequência horizontal da ponte, entrando assim em ressonância. Esta sincronização do andamento dos peões com a frequência da ponte designa-se de efeito *lock-in*, ocorrendo este efeito quando os deslocamentos da ponte excedem um determinado valor. Este valor do deslocamento depende da direcção da vibração, da idade do peão, e de outros factores. Para frequências verticais de  $\approx 2$  Hz este deslocamento é de 10 a 20 mm, e para frequências horizontais de  $\approx 1$  Hz alguns peões reagem a partir de 3 mm. À medida que os peões entram em ressonância com a frequência natural da ponte os deslocamentos aumentam, e em consequência cada vez mais peões provocam o efeito *lock-in*. Em certos casos é possível observar que mais de 80% de peões se deslocam sincronizados com a frequência da ponte [8].

A análise do vento nas pontes pedonais com tabuleiros pouco rígidos é importante no que respeita ao seu dimensionamento de modo a resistir aos esforços, e a conferir conforto aos seus utilizadores. Para uma determinada velocidade do vento, a energia recebida pela estrutura é superior à que esta consegue dissipar pelo seu amortecimento estrutural, o que leva a aumentos rápidos de amplitude de deslocamentos onde o limite é a destruição da estrutura. O fluxo de ar introduz na ponte oscilações de torção e de flexão que através de pequenas variações do ângulo do vento provoca efeitos de impulsão. Este fenómeno é designado de *flutter*, e foi exemplificado em 1940 pelo colapso da ponte Tacoma Narrows, nos EUA. Os estudos desenvolvidos desde então indicam que as frequências de torção e de flexão devem estar suficientemente afastadas. Mathivat mostrou ser aconselhável que a ponte tenha uma razão mínima de 2.5 entre a frequência vertical e a primeira frequência de torção [8]. A frequência vertical corresponde ao modo vertical que tem uma deformada semelhante à representada na fig. 3.9.

*Flutter* pode ocorrer devido ao fenómeno de *vortex-shedding*, onde a forma do tabuleiro da ponte influencia o fluxo do ar provocando a rotação deste e permitindo a sua impulsão (fig. 3.8), ou pode ser devido à própria excitação do tabuleiro como na fig. 3.9, onde se mostra uma descrição simplificada deste processo no caso de uma diferença de período de  $\pi/2$  entre a flexão e a torção.

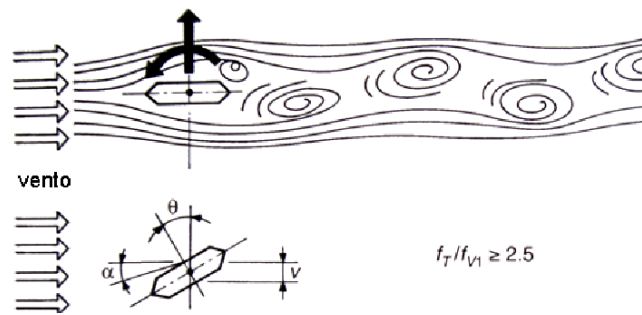
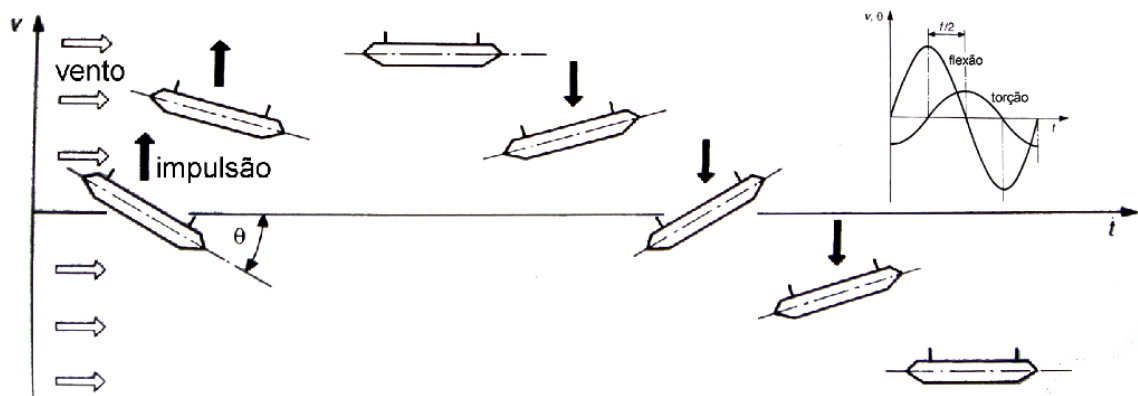
Fig. 3.8 – Descrição do fenómeno de *flutter* por vortex-shedding [8]

Fig. 3.9 – Descrição do fenómeno de flutter por excitação própria do tabuleiro [8]

### 3.3.1 ANÁLISE DINÂMICA DE PONTES *STRESS-RIBBON*

O primeiro passo de uma análise dinâmica é o cálculo das frequências e modos de vibração naturais da estrutura, seguido da análise da resposta a cargas. Devido à simplicidade estrutural de algumas pontes deste tipo é possível usar as equações (4.27), (4.28) e (4.29) para um cálculo prévio das frequências e dos modos, e posteriormente para um cálculo mais correcto deve-se proceder a uma análise não-linear.

Este tipo de pontes só se comporta como uma estrutura contínua quando existem deslocamentos longitudinais no topo dos pilares. Para cargas pequenas, como um grupo de peões, as variações das tensões são insignificantes e portanto pode-se considerar cada vão separado, sendo aconselhável fazer a análise atendendo à estrutura completa e dividida.

De seguida é descrita a análise dinâmica de duas pontes pedonais do tipo *stress-ribbon* com diferentes características [8]. A primeira é a Grants Pass Bridge nos EUA com três vãos e dois pilares centrais. A segunda é a ponte Maidstone no Reino Unido com dois vãos e um pilar intermédio.

A ponte Grants Pass (fig. 3.10) tem um comprimento de aproximadamente 200 m, com um tabuleiro de 4.7 m de largura e 0.356 m de espessura. Na fig. 3.11 observam-se os resultados da respectiva análise dinâmica.



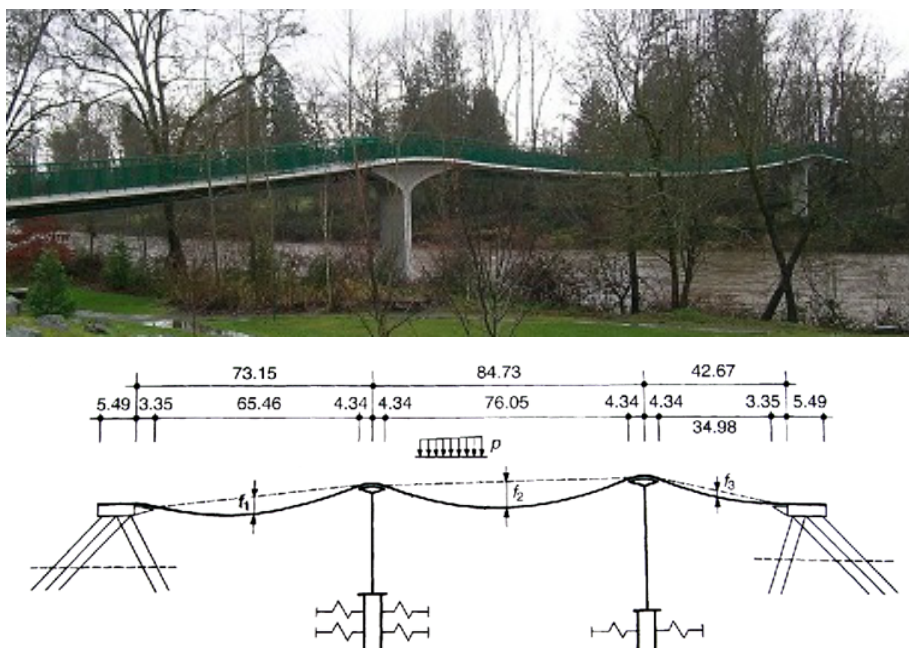


Fig. 3.10 – Ponte Grants Pass nos EUA e respectivo modelo de cálculo [8]

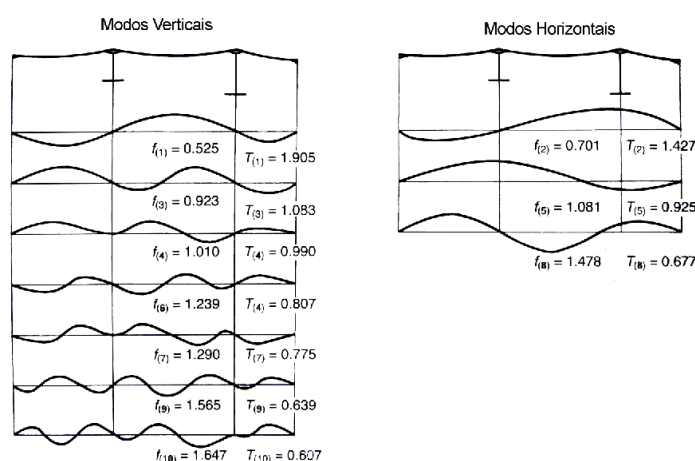


Fig. 3.11 – Modos de vibração e frequências naturais da ponte Grants Pass [8]

A ponte Maidstone (fig. 3.12) tem um comprimento de 87 m, um tabuleiro com 3.1 m de largura e uma espessura entre 0.29 m e 0.765 m. Os seus modos de vibração são complexos devido à sua forma invulgar como representado na fig. 3.13.

Apesar da esbelteza deste tipo de pontes, é possível obter estruturas seguras e confortáveis como os dois exemplos referidos. No caso de pontes *stress-ribbon* instáveis é possível aumentar a sua rigidez, através da adição de cabos exteriores ao tabuleiro da ponte. Estes, podem estar de lado, acima ou abaixo do tabuleiro. Para analisar a importância dos cabos exteriores numa ponte deste tipo, em [8] procedeu-se a uma comparação entre uma ponte simples, de um vão de 99 m, com uma igual mas com um vão de 198 m. Esta última é testada com 4 tipos de combinações dos cabos exteriores para aumentar a rigidez.



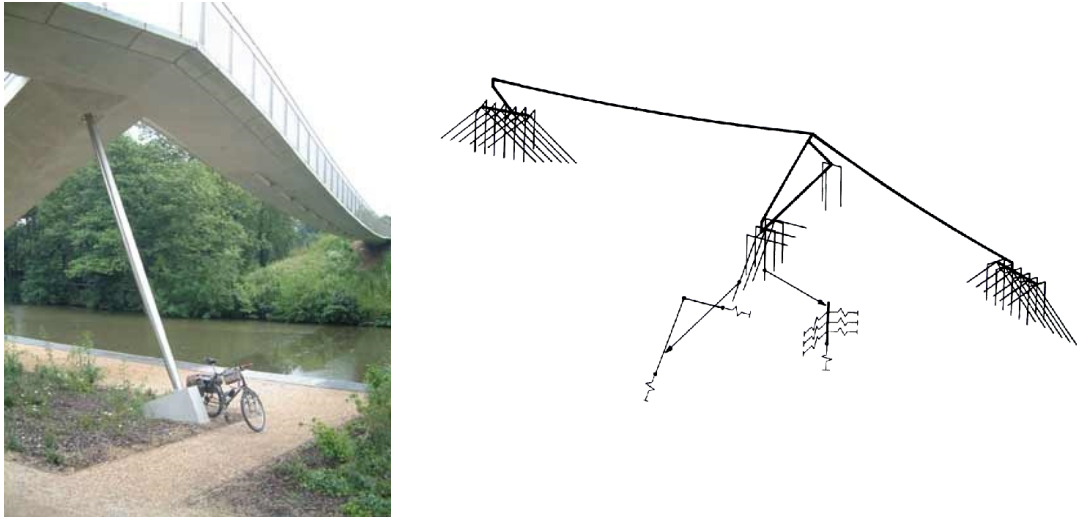


Fig. 3.12 – Ponte Maidstone no Reino Unido e respectivo modelo de cálculo [8]

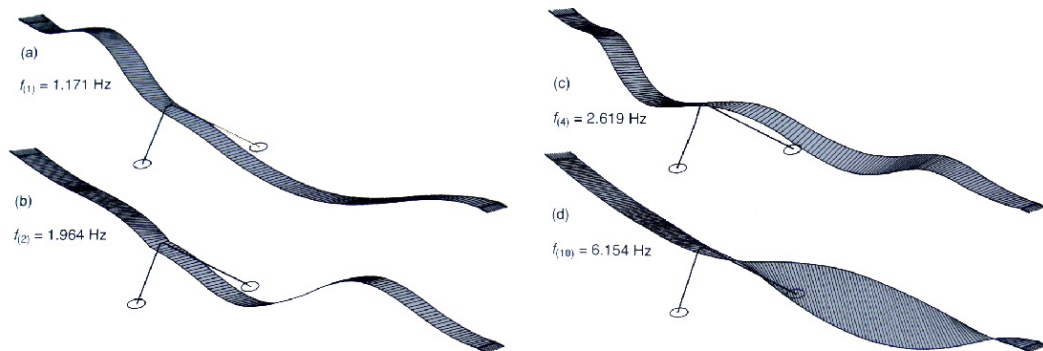


Fig. 3.13 – Modos de vibração e frequências naturais da ponte Maidstone [8]

A ponte de 99 m e a ponte de 198 m são constituídas por um tabuleiro rectangular com 5 m de largura e 250 mm de espessura. Os cabos internos do tabuleiro foram calculados para o peso próprio, a carga permanente (4 kN/m) e uma variação da temperatura de  $\pm 20^\circ\text{C}$ . A ponte de 99 m tem uma flecha de 1.2375 m e a de 198 m tem uma flecha de 2.475 m.

A ponte de 198 m foi analisada para quatro tipos de diferentes disposições dos cabos de pré-esforço (fig. 3.14). No tipo 1 os cabos estão dentro do tabuleiro; no tipo 2 os cabos estão situados ao lado do tabuleiro a um máximo de 5 m, descrevendo em planta uma parábola de segundo grau; no tipo 3 os cabos estão horizontalmente a 5 m do tabuleiro e verticalmente a 5 m, mais a flecha; no tipo 4 os cabos estão debaixo do tabuleiro, ligados a este por barras [8].

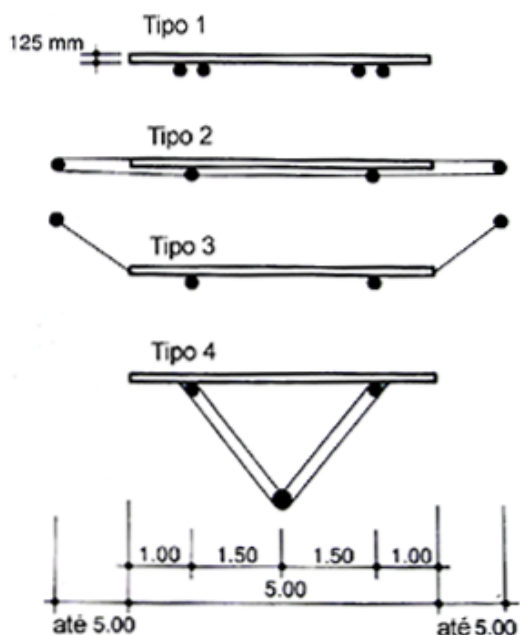


Fig. 3.14 – Representação dos 4 tipos de disposição dos cabos de pré-esforço [8]

Na tabela 3.2 encontram-se as frequências para os 4 modos de vibração, para a ponte de 99 m e para os 4 tipos da ponte de 198 m. Os modos A e B correspondem aos modos verticais  $f_1$  e  $f_2$  observados na fig. 4.12. O modo C corresponde ao primeiro modo relativo à combinação de movimento transversal e de torção. O modo D corresponde ao movimento de torção.

A razão entre a frequência do modo D e do modo B deve ser superior a 2.5, sendo provável a possibilidade de instabilidade aerodinâmica do tabuleiro para valores inferiores. Esta instabilidade aumenta com o comprimento da ponte, como se observa na tabela 3.2 para a ponte de 99 m e para a ponte tipo 1 de 198 m. Este efeito prejudicial pode ser contrariado pela disposição dos cabos no exterior, que aumenta a razão entre  $f_d$  e  $f_b$  para valores semelhantes ao da ponte de 99 m, sendo a ponte de tipo 3 a mais indicada para o efeito.

Tabela 3.2 – Frequências e modos de vibração naturais [8]

Ponte com 99 m de comprimento

Modo a		Modo b		Modo c		Modo d		
Posição	$f_a(\text{Hz})$	Posição	$f_b(\text{Hz})$	Posição	$f_c(\text{Hz})$	Posição	$f_d(\text{Hz})$	$f_d/f_b$
1 <sup>a</sup>	0.7698	2 <sup>a</sup>	1.0890	3 <sup>a</sup>	1.3460	7 <sup>a</sup>	2.5400	2.3324

Ponte com 198 m de comprimento

	Modo a		Modo b		Modo c		Modo d		
	Posição	$f_a(\text{Hz})$	Posição	$f_b(\text{Hz})$	Posição	$f_c(\text{Hz})$	Posição	$f_d(\text{Hz})$	$f_d/f_b$
Tipo 1	1 <sup>a</sup>	0.4640	3 <sup>a</sup>	0.7310	2 <sup>a</sup>	0.6301	6 <sup>a</sup>	1.2980	1.7756
Tipo 2	1 <sup>a</sup>	0.4639	2 <sup>a</sup>	0.7313	3 <sup>a</sup>	0.7863	7 <sup>a</sup>	1.5450	2.1127
Tipo 3	1 <sup>a</sup>	0.4343	2 <sup>a</sup>	0.6022	3 <sup>a</sup>	0.6388	7 <sup>a</sup>	1.4350	2.3829
Tipo 4	1 <sup>a</sup>	0.4406	2 <sup>a</sup>	0.6486	3 <sup>a</sup>	0.5822	6 <sup>a</sup>	1.3640	2.1020

Através da equação (3.6), que foi obtida pela recolha de dados de várias pontes pedonais, pode-se calcular a relação das primeiras frequências naturais entre pontes iguais, com comprimentos diferentes. O resultado obtido para este caso através da equação (3.6) é 1.6586, valor que é quase idêntico à razão entre as frequências verticais indicadas na tabela 3.2, que é de  $0.7698/0.4640 = 1.659$ .

$$\frac{33.6 \times 99^{-0.73}}{33.6 \times 198^{-0.73}} = 1.6586 \quad (3.7)$$

Os resultados obtidos neste estudo indicam que a rigidez da estrutura é em grande parte devida à tensão de pré-esforço no tabuleiro. A colocação dos cabos fora do tabuleiro aumenta a frequência do modo de torção, conferindo assim uma maior rigidez transversal. Nas pontes do tipo 3, a frequência dos modos verticais diminui quando se elevam os cabos em relação ao eixo horizontal do tabuleiro.

### 3.3.2 ANÁLISE DINÂMICA DE PONTES SUSPENSAS

De seguida é apresentado a análise dinâmica de duas pontes pedonais suspensas, estudadas em [8]. A primeira é a ponte do lago Vranov, na Republica Checa, e a segunda é a ponte do rio Willamette, nos EUA.

A ponte do lago Vranov (fig. 3.15) tem um vão de 252 m, um tabuleiro com 40 cm de espessura e uma largura entre 6.5 m e 9.7 m. Os modos de vibração 1, 3 e 7 estão representados na fig. 3.16. Devido ao facto de as 12 primeiras frequências relativas ao modo vertical estarem abaixo de 2Hz, esta ponte não revelou problemas quando sujeita a testes de carga com peões [8].

Sendo o modo 1 o primeiro modo de vibração vertical, e o modo 7 o primeiro modo de torção, obtém-se para esta ponte uma razão entre os 2 modos de 2.648, valor que se encontra acima dos 2.5, o que indica que esta ponte não deve ter problemas de instabilidade aerodinâmica.

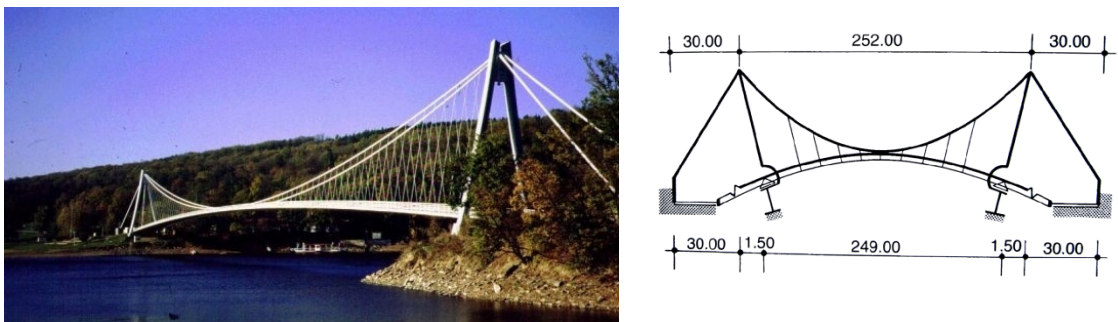


Fig. 3.15 – Ponte do lago Vranov e respectivo modelo de cálculo [8]

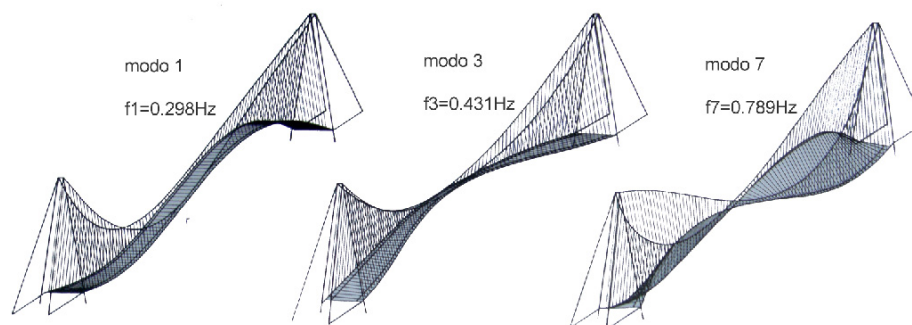


Fig. 3.16 – Modos de vibração e frequências naturais da ponte do lago Vranov [8]

A ponte do rio Willamette (fig. 3.17) tem um comprimento de 149.25 m, um tabuleiro com 6.5 m de largura e 0.71 m de espessura. Os modos de vibração 1, 2, 5 e 8, e as suas respectivas frequências estão representados na fig. 3.18, tendo estes sido obtidos através da aplicação de uma força descrita pela equação (3.2). A primeira frequência vertical apresenta-se afastada de 2 Hz, sendo este um aspecto desejável. A razão desta frequência com a frequência do oitavo modo, que corresponde à frequência do modo de torção, é de 3.529, o que também é desejável em termos de estabilidade aerodinâmica, visto ser superior à razão de frequências, que é igual a 2.5.

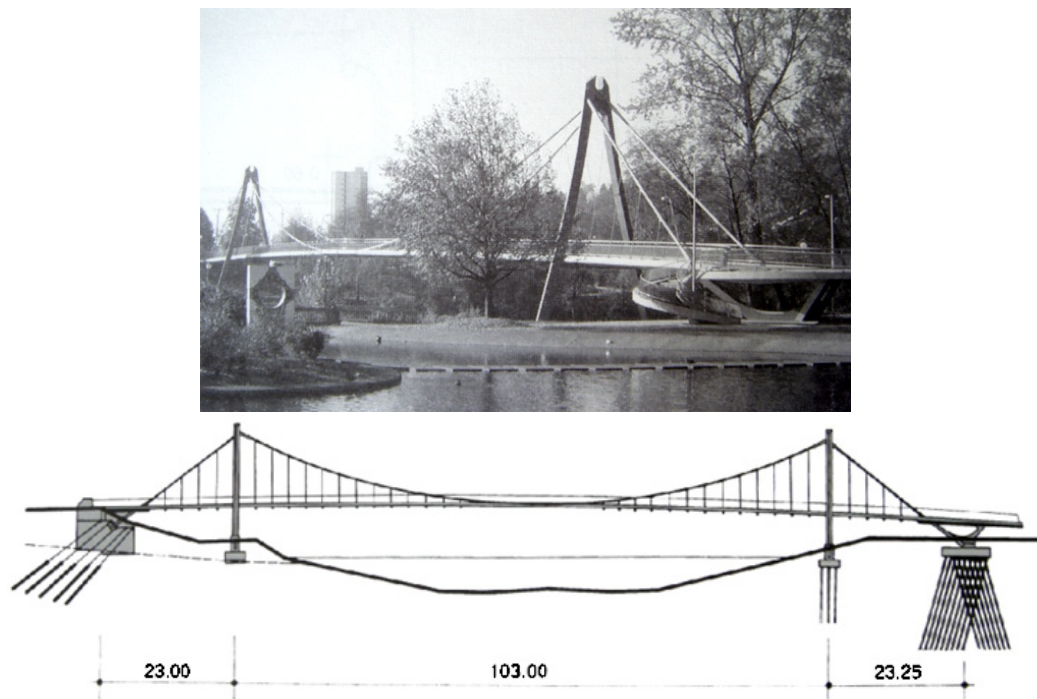


Fig. 3.17 – Ponte do rio Willamette e respectivo modelo de cálculo [8]

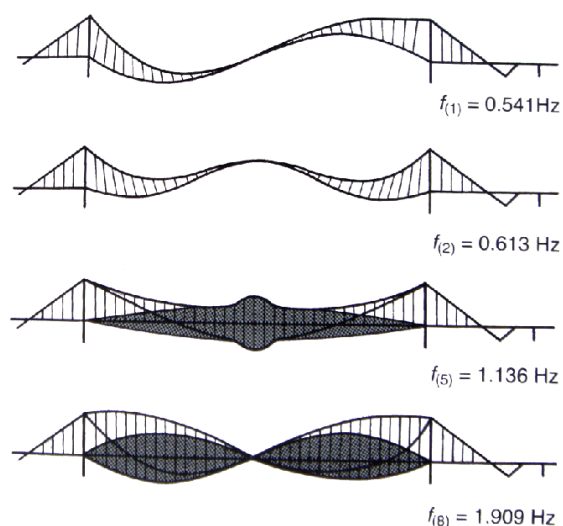


Fig. 3.18 - Modos de vibração e frequências da ponte do rio Willamette [8]

No âmbito desta dissertação, foi realizado um estudo paramétrico para uma ponte suspensa de 100 m de comprimento e um tabuleiro de 3 m de largura e 0.3 m de espessura, usando o programa SAP2000 e elementos barra e cabo 3D. Foram comparadas as frequências naturais em vários modos de vibração.

Os tipos de estrutura analisados (fig. 3.19) diferem na flecha ( $f$ ), na forma do tabuleiro, na posição dos apoios e na geometria da estrutura.

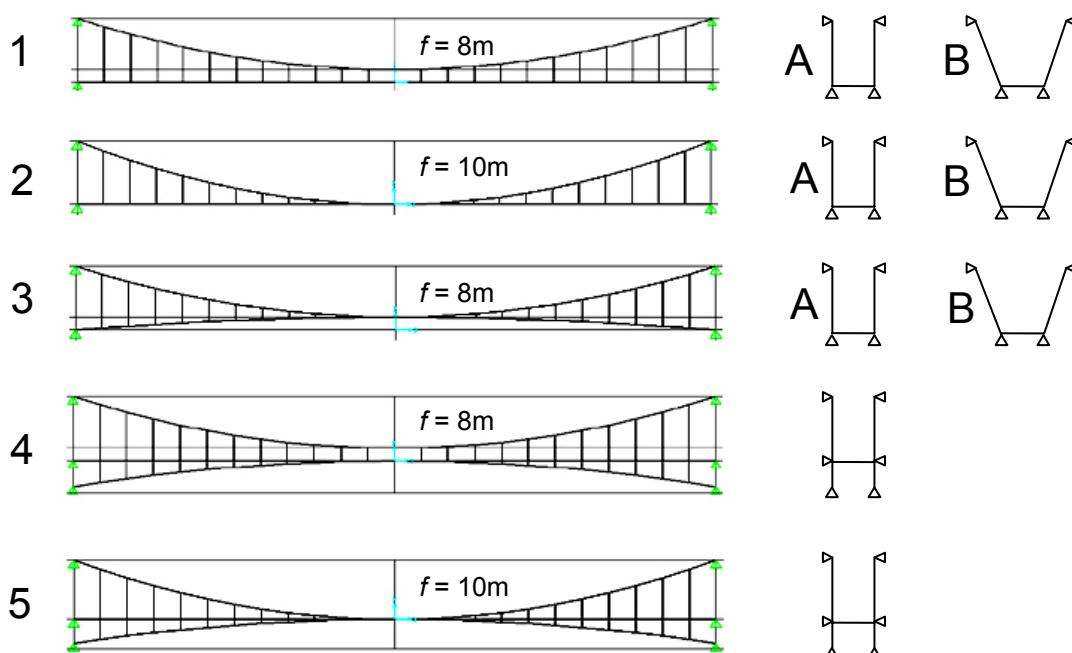


Fig. 3.19 – Tipos de estruturas analisadas

Para cada tipo de estrutura indicado na fig. 3.19, encontram-se na tabela 3.3 as frequências naturais correspondentes aos 5 modos de vibração seguintes:

- $f_H$  – primeiro modo horizontal
- $f_{V1}$  e  $f_{V2}$  – dois primeiros modos verticais;
- $f_S$  – primeiro modo correspondente ao movimento transversal combinado com a torção;
- $f_T$  – primeiro modo de torção.

No cálculo de  $f_T/f_V$ ,  $f_V$  corresponde a  $f_{V2}$  para a estrutura tipo 1 e  $f_{V1}$  para os restantes tipos de estruturas, pois estes modos verticais apresentam uma deformada semelhante à do modo de torção.

Tabela 3.3 – Frequências naturais para várias pontes suspensas

	$f_H$ (Hz)	$f_{V1}$ (Hz)	$f_{V2}$ (Hz)	$f_S$ (Hz)	$f_T$ (Hz)	$f_T/f_V$
1-A	1.156	1.047	1.077	1.961	2.800	2.600
1-B	1.118	0.994	1.049	2.028	2.771	2.642
2-A	1.369	0.837	1.355	2.604	3.258	3.892
2-B	1.325	0.834	1.303	3.024	3.207	3.892
3-A	1.324	0.862	1.401	2.673	3.262	3.784
3-B	1.279	0.841	1.363	2.960	3.162	3.760
4	1.336	1.296	1.680	1.953	2.877	2.220
5	1.478	1.097	1.700	2.568	3.270	2.981

A razão  $f_T/f_V$  foi calculada com o objectivo de avaliar quais são os tipos de estruturas que são menos propícios a ter instabilidade aerodinâmica. As soluções 2 e 3 apresentam valores de  $f_T/f_V$  superiores às

restantes, sendo assim menos propícias a ter instabilidade aerodinâmica, pois esta instabilidade é inversamente proporcional ao valor de  $f_T/f_V$ .

No tipo 4 e 5, devido aos cabos adicionados por baixo do tabuleiro, as frequências verticais são superiores. As soluções 2 e 3 permitem diminuir  $f_{V1}$  e aumentar  $f_{V2}$ . A diferente disposição dos pilares não aparenta ter grande relevância na alteração de  $f_H$ . No entanto esta frequência é directamente proporcional à flecha, tendo a solução 5 a maior frequência e a 1-B a menor.

### 3.3.3 ANÁLISE DINÂMICA DE PONTES ATIRANTADAS

Usando o programa de cálculo automático SAP2000, e os elementos de cabo e barra 3D, procedeu-se a um estudo paramétrico de uma ponte atirantada com 80 m de comprimento, com um tabuleiro de 3 m de largura e 0.4 m de espessura. O vão central tem 40 m e os vãos extremos 20 m.

Os pilares têm 15 m de altura, com excepção da configuração tipo B em que têm 10 m. O tabuleiro encontra-se a 5 m de altura do solo. Em todos os casos os pilares encontram-se encastrados na base. O tabuleiro tem um apoio triplo no início e um duplo no fim, sendo este livre na direcção axial ao mesmo.

Na fig. 3.20 encontram-se as 7 pontes atirantadas estudadas, diferindo 6 destas relativamente à do tipo A: no que respeita à altura dos pilares (B); no local de ancoragem dos cabos nos pilares (C); no número de cabos (D); e na geometria dos pilares (E, F e H). Em E, o topo dos pilares é afastado 6 m, e em H, as fundações são afastadas 6m. Na tabela 3.4 encontram-se as frequências de vibração para os mesmos modos indicados nas tabelas 3.2 e 3.3, assim como o 1º modo de vibração horizontal no sentido perpendicular ao tabuleiro.

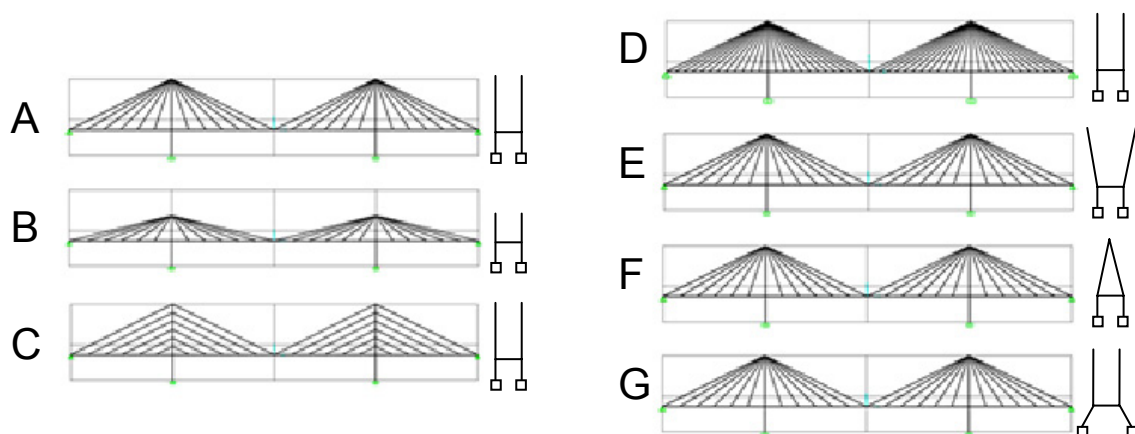


Fig. 3.20 – Diferentes tipos de configurações destinada a um estudo paramétrico

Tabela 3.4 – Frequências naturais correspondentes aos diversos tipos de modos de vibração

	$f_H$ (Hz)	$f_{V1}$ (Hz)	$f_{V2}$ (Hz)	$f_S$ (Hz)	$f_T$ (Hz)	$f_T/f_{V1}$
A	1.120	2.368	4.805	5.842	17.718	7.482
B	1.151	2.533	5.351	6.501	13.588	5.364
C	1.115	2.573	3.833	5.391	12.523	4.867
D	1.094	3.534	6.763	3.350	17.309	4.898
E	1.147	3.136	6.387	4.009	17.482	5.575
F	1.118	3.617	6.511	3.735	12.433	3.437
G	1.784	2.343	4.785	5.783	17.612	7.517

Comparando as frequências relativas a cada configuração chega-se a várias conclusões:

- relativamente à instabilidade aerodinâmica, a configuração A é que se comporta melhor, pois apresenta a maior razão  $f_T/f_{V1}$ ;
- devido à diminuição da altura dos pilares na configuração B, esta tem uma frequência de torção menor, assim como a configuração C, devido à configuração dos cabos;
- utilizando o dobro de cabos na configuração D, obtém-se um aumento de rigidez vertical e assim um aumento das frequências verticais, como também acontece com as configurações E e F;
- na configuração F diminui a frequência de torção e aumenta a frequência vertical  $f_{V1}$ , obtendo a razão  $f_T/f_{V1}$  mais baixa de todas as soluções, sendo portanto a mais desfavorável no comportamento aerodinâmico, pois quanto menor for  $f_T/f_{V1}$  maior é a possibilidade de existir instabilidade devido à acção do vento;
- na configuração G, devido ao facto de os apoios dos pilares estarem mais afastados entre si, tem-se uma maior rigidez horizontal, logo uma maior frequência horizontal, sendo este facto benéfico por permitir afastar esta da frequência crítica, que corresponde a 1 Hz.







## 4

## ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA NÃO LINEAR

### 4.1. INTRODUÇÃO

O comportamento não linear duma estrutura é devido à sua não linearidade geométrica e/ou à sua não linearidade material.

Neste trabalho é estudada a importância da análise não linear geométrica, que tem bastante impacto no estudo de estruturas com cabos. Sabendo que estas apresentam normalmente grandes deslocamentos, pode-se considerar insuficiente o seu estudo apenas através da hipótese dos pequenos deslocamentos em associação com a lei de Hooke. Sendo assim, é necessário determiná-los através de métodos iterativos, como o de Newton-Raphson.

A não linearidade material não é considerada neste trabalho, apesar da sua importância no comportamento da generalidade das estruturas, uma vez que os cabos apresentam uma relação entre tensão e deformação na sua fase elástica, praticamente linear. Pelo contrário, o betão sofre uma variação acentuada das suas características mecânicas, à medida que ocorre a fendilhação. Na fig. 4.1 está representado o diagrama tensão-deformação para um provete de betão e para um cabo de aço. No provete de betão verifica-se um comportamento não linear, para o qual o módulo de elasticidade se modifica com as deformações. O mesmo já não acontece com um cabo de aço, pois este apresenta um comportamento linear e elástico, sendo o seu módulo de elasticidade praticamente constante ao longo do ensaio.

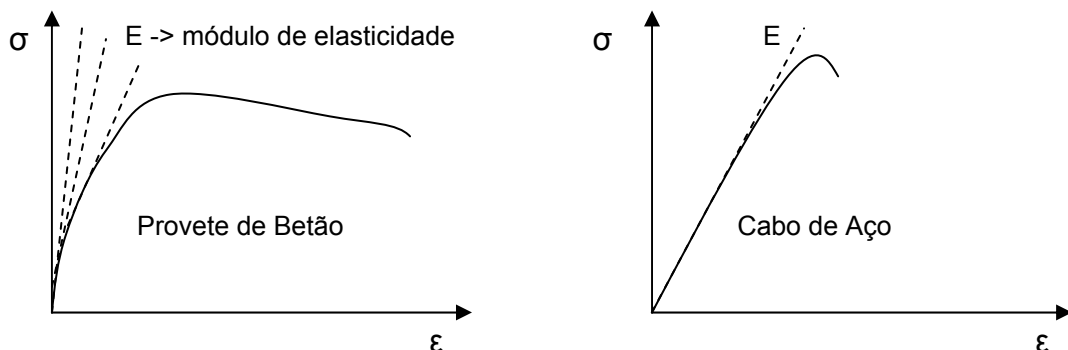


Fig. 4.1 – Diagramas tensão-deformação

Neste trabalho, ao analisar somente cabos, apenas se considera a influência do esforço axial de cada cabo para o cálculo da estabilidade da estrutura. A matriz de rigidez geométrica, proveniente do esforço axial provocado pela variação geométrica da estrutura, é adicionada à matriz de rigidez inicial. Assim, a análise estrutural passa a ser não através de uma configuração inicial da estrutura, mas sim, através de diferentes deformadas, as quais convergem numa deformada final.

#### 4.2. MODELAÇÃO DE UM CABO

No estudo de estruturas com cabos, existem vários métodos para os modelar. Podem ser analisados como um elemento único, pelo uso de um módulo de elasticidade equivalente, ou dividindo-os em vários segmentos e considerá-los como treliças que só resistem à tracção.

No caso de se pretender modelar o cabo como apenas um elemento, é necessário analisar as suas características (fig. 4.2), pois estas diferem bastante das de uma barra de treliça devido ao facto da sua geometria variar significativamente com os esforços aplicados. Considerando um cabo com área  $A$ , módulo de elasticidade  $E$ , ligado por intermédio de dois apoios duplos  $a$  e  $b$ , e sujeito a uma carga distribuída  $q(x)$ , obtém-se a sua geometria através da coordenada  $y(x)$ , a flecha  $f(x)$ , a inclinação  $y'(x) = \tan \varphi(x)$  e o raio  $R(x)$ . O cabo está traccionado por uma força  $N(x)$  que tem uma componente vertical  $V(x)$  e horizontal  $H(x)$  [8]. Nestas condições, tem-se

$$\tan \beta = \frac{h}{l} \quad (4.1)$$

$$N(x)^2 = H(x)^2 + V(x)^2 \quad (4.2)$$

$$H(x) = N(x) \cos \varphi(x) \quad (4.3)$$

$$V(x) = N(x) \sin \varphi(x) \quad (4.4)$$

Para uma força horizontal  $H$  constante, verifica-se

$$V(x) = H \tan \varphi(x) = H \frac{dy}{dx} = Hy'(x) \quad \leftrightarrow \quad dV(x) = Hy''(x)dx \quad (4.5)$$

Pelo equilíbrio das forças verticais, tem-se

$$q(x)dx = -dV(x) = -Hy''(x)dx \quad (4.6)$$

$$y''(x) = -\frac{q(x)}{H} \quad (4.7)$$

$$y' = \frac{Q(x)}{H} + C_1 \quad (4.8)$$

$$y(x) = \frac{M(x)}{H} + C_1x + C_2 \quad (4.9)$$

onde  $Q(x)$  corresponde ao esforço transversal,  $M(x)$  ao momento e  $C_1$  e  $C_2$  a constantes calculadas pelas seguintes condições de fronteira:

$$x = 0 \quad y = y(a)$$

$$y(a) = 0 + C_1 \times 0 + C_2 \quad C_2 = y(a)$$

$$x = l \quad y = y(b)$$

$$y(b) = 0 + C_1 \times l + C_2 = C_1 \times l + y(a) \quad C_1 = \frac{y(b)-y(a)}{l} = \frac{h}{l}$$

Sendo  $f(x) = \frac{M(x)}{H}$ , resulta

$$y(x) = \frac{M(x)}{H} + \frac{h}{l}x + y(a) = f(x) + x \tan \beta + y(a) \quad (4.10)$$

No caso da carga distribuída  $q(x)$  ser constante a flecha é

$$f(x) = \frac{M(x)}{H} = \frac{1}{H} \left( \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2 \right) = \frac{q}{2H}x(l-x) \quad (4.11)$$

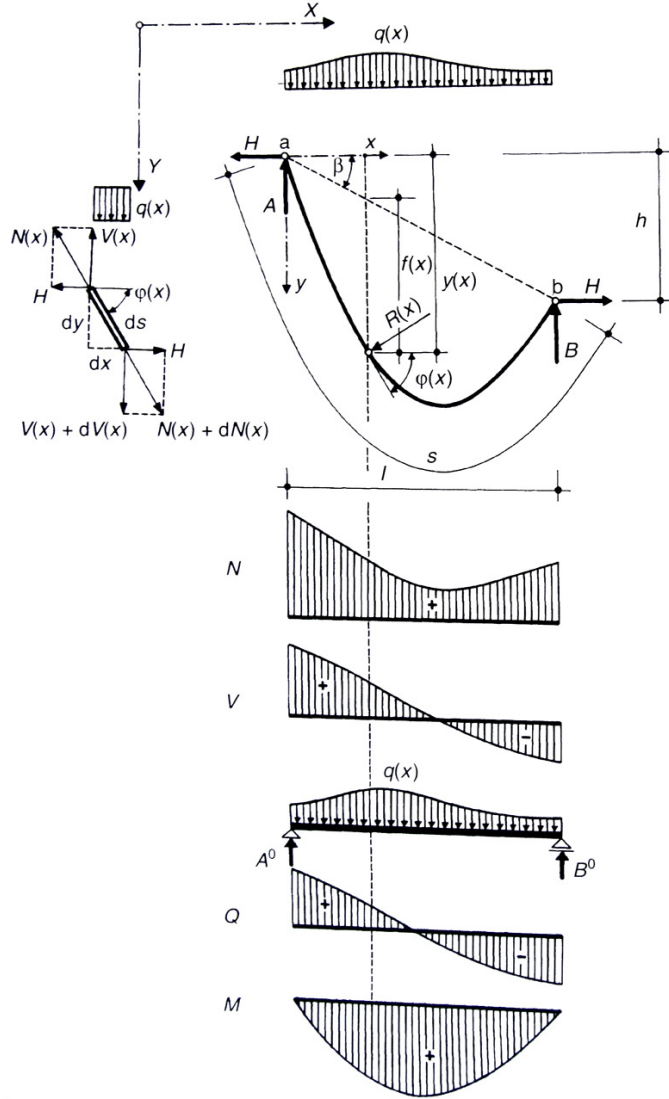


Fig. 4.2 – Características de um cabo [8]

No caso de cabos integrados em estruturas, estes apresentam um comportamento não linear, pois ao aplicar um incremento de tensão à forma inicial há uma diminuição da flecha e uma variação do comprimento, e conseqüentemente uma alteração da rigidez axial. Devido à dificuldade de estudar as estruturas complexas como um todo, é possível proceder a uma análise mais simplificada da estrutura, através da divisão desta nos seus elementos mais simples, cujo comportamento é facilmente analisado. Assim reorganizando os elementos é possível estudar a estrutura original, duma maneira simplificada e aproximada. Para analisar este comportamento do cabo pode-se modelá-lo através da decomposição deste em várias treliças, que têm um comportamento aproximado ao do cabo curvo (fig. 4.3). Esta modelação é tanto mais eficaz, quanto mais segmentos forem criados.

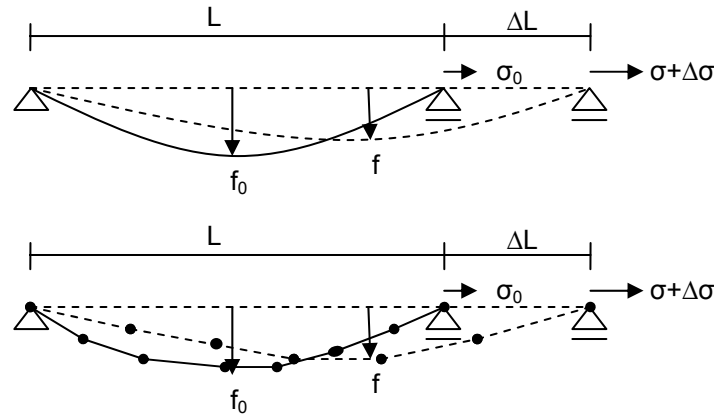


Fig. 4.3 – Modelação de um cabo por decomposição em segmentos

Outro modo de analisar um cabo é através do recurso ao módulo de elasticidade equivalente, que foi introduzido por Ernst [5]. Através deste tipo de análise, modela-se o cabo curvo como um cabo recto, relacionando o alongamento horizontal do cabo, com o incremento da força de tracção.

O módulo de elasticidade equivalente ( $E_{eq}$ ) é definido para um determinado nível de tensão ( $\sigma$ ), através da equação (4.12). Nesta equação, as extensões  $\varepsilon_c$  e  $\varepsilon_e$  são devidas, respectivamente, à alteração de curvatura do cabo e ao comportamento elástico do material, que se relacionam com a tensão instalada através dos módulos de elasticidade  $E_c$  e  $E$ . Podendo a equação (4.12) ser apresentada em função destes parâmetros, resultado a equação (4.13) [10].

$$E_{eq} = \frac{\sigma}{\varepsilon_c + \varepsilon_e} \quad (4.12)$$

$$E_{eq} = \frac{E_c E}{E_c + E} \quad (4.13)$$

Admitindo o cabo sujeito à acção do peso próprio distribuído ao longo da sua corda (fig. 4.4), a configuração deformada é a de uma parábola de 2º grau e o desenvolvimento do cabo obtém-se através de (4.14). A partir do desenvolvimento em série desta equação, retêm-se apenas os 2 primeiros termos em (4.15), os quais são suficientes para relações flecha/vão inferiores a 0.15.

$$S = \int_0^{L_c} \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx \quad (4.14)$$

$$S = L_e \left( 1 + \frac{8 f_1^2}{3 L_c^2} \right) \quad (4.15)$$

Através da variação de comprimento ( $\Delta l$ ) em (4.16), obtém-se a derivada de  $\Delta l$  em função da força de tracção, segundo a corda ( $T$ ) em (4.17). Com esta última equação obtém-se o módulo de elasticidade do cabo devido à sua curvatura ( $E_c$ ) em (4.18).

$$\Delta l = S - L_e = \frac{8 f_1^2}{3 L_c^2} = \frac{w^2 L_c^3 \cos^2 \theta}{24 T^2} \quad (4.16)$$

$$\frac{d\Delta l}{dT} = \frac{w^2 L_c^3 \cos^2 \theta}{12T^3} \quad (4.17)$$

$$E_c = \frac{1}{A} \frac{dF}{d\Delta l} = \frac{12 F^3}{Aw^2 L^2} = \frac{12\sigma^3}{(\gamma L)^2} \quad (4.18)$$

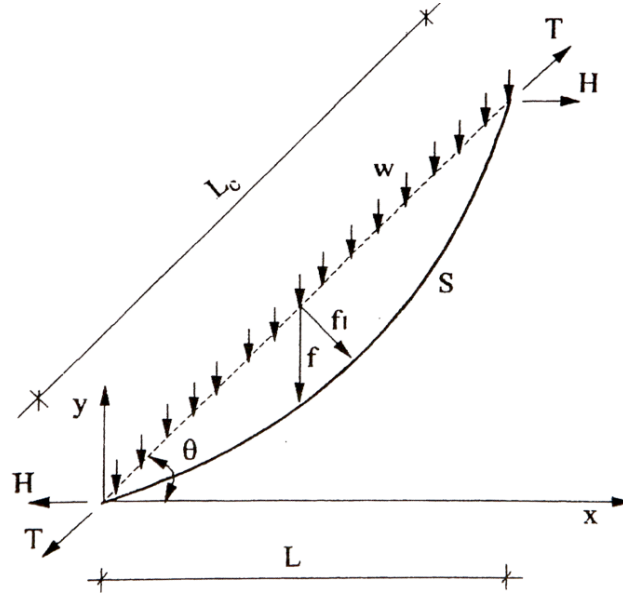


Fig. 4.4 – Cabo sujeito ao peso próprio [10]

Substituindo (4.18) em (4.13) obtém-se a expressão do módulo de elasticidade equivalente em função do comprimento horizontal do cabo ( $L$ ), a sua densidade ( $\gamma$ ), a tensão suportada ( $\sigma$ ) e o módulo de elasticidade normal ( $E$ ).

$$E_{eq} = \frac{E}{1 + \left[ \frac{(\gamma L)^2}{12\sigma^3} \right] E} \quad (4.19)$$

A partir de (4.19) obtém-se um gráfico entre a variação do módulo de elasticidade e o comprimento do cabo (fig. 4.5), para diferentes tensões a que o cabo esteja submetido. Considerando a tensão de rotura do cabo igual a 1500 MPa ( $\sigma_{max}$ ) e o peso específico igual a 77.0085 kN/m<sup>3</sup>, calcularam-se as variações do módulo para diferentes percentagens da tensão máxima (ver fig. 4.5).

O recurso ao módulo de elasticidade equivalente permite uma análise não linear geométrica de um cabo, que é considerada no código do programa elaborado nesta dissertação, no capítulo 5.3.5.. Para cabos de pequena dimensão, e cuja tensão de serviço esteja próxima da máxima, a análise não linear não tem influência nos resultados, pois a razão entre o módulo de elasticidade normal e equivalente é muito aproximada da unidade. Este factor revela maior interesse no estudo de cabos de grandes dimensões e com tensões instaladas médias, ou em estruturas complexas onde as tensões nos cabos variam muito com as forças aplicadas, o que provoca alterações na rigidez nos cabos, e assim diferentes resultados estáticos e dinâmicos para uma análise não linear da estrutura.

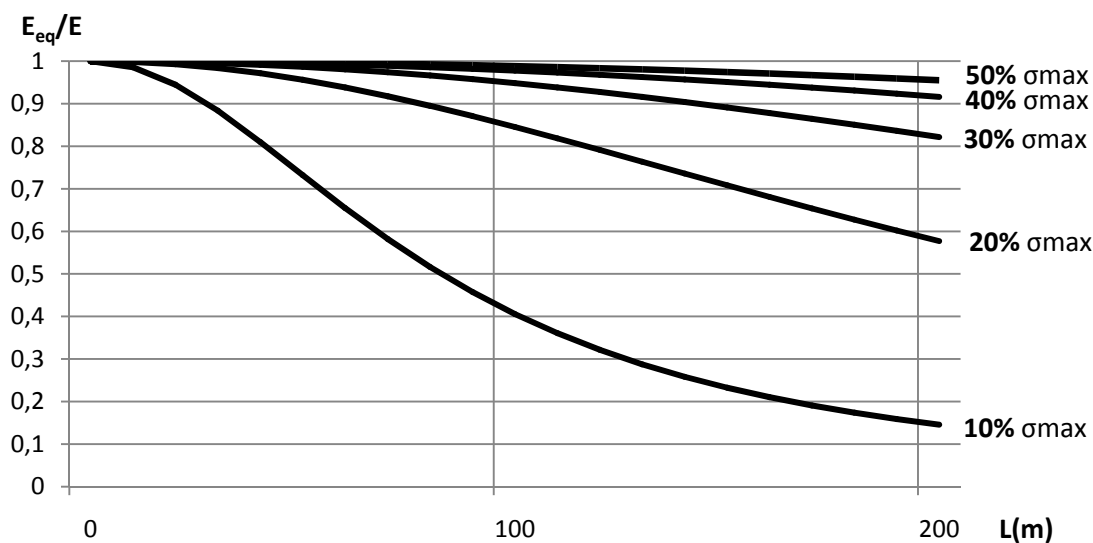


Fig. 4.5 – Relação entre a variação do módulo de elasticidade e o comprimento do cabo

### 4.3. MATRIZ DE RIGIDEZ DO CABO

Para elaborar a matriz de rigidez consideram-se que o cabo tem 3 graus de liberdade por nó, que correspondem ao movimento de translação nos 3 eixos. Admite-se que o cabo só tem rigidez axial.

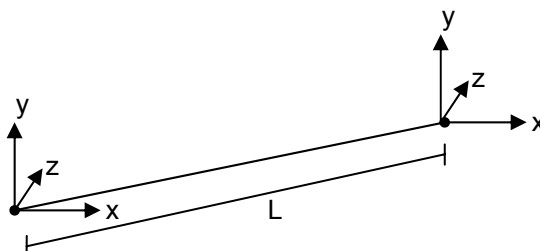


Fig. 4.6 – Graus de liberdade de um cabo

A matriz de rigidez local em (4.20) apresenta apenas rigidez para o 1º grau de liberdade. Através da análise não linear geométrica, esta matriz altera-se à medida que as tensões nos cabos mudam e o cabo se deforma. Esta modificação da matriz de rigidez encontra-se explicada no capítulo 5.3.6.

$$K = \frac{AE_{eq}}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (sim) & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

### 4.4. MÉTODOS ITERATIVOS

Na análise geometricamente não linear, a posição dos nós livres da estrutura altera-se à medida que as forças se equilibram e a matriz de rigidez se modifica. Para permitir a convergência dessas alterações recorre-se a métodos iterativos, que permitem que os deslocamentos converjam para um valor ao qual está associado um erro previamente indicado.

Neste trabalho foram utilizados os 3 métodos iterativos em seguida explicados. No programa elaborado no âmbito desta dissertação é possível escolher qual o método a utilizar para o cálculo não linear. No capítulo 7 é evidenciado que o método de Newton-Raphson é o que em geral apresenta convergência mais rápida.

#### 4.4.1 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Neste método a matriz de rigidez utilizada varia de iteração para iteração, devido à alteração da posição dos nós que provocam esforços nos cabos, sendo estes calculados no fim da iteração.

Conhecidas a matriz de rigidez e as forças do sistema, é possível calcular os deslocamentos dos nós da estrutura através da seguinte fórmula

$$[u] = [K]^{-1}[L] \quad (4.21)$$

onde:

$[K]$  = matriz de rigidez

$[u]$  = vector deslocamentos

$[L]$  = vector força

Na fig. 4.7 é analisado o deslocamento não linear devido à aplicação de uma carga, num sistema de 1 grau de liberdade.

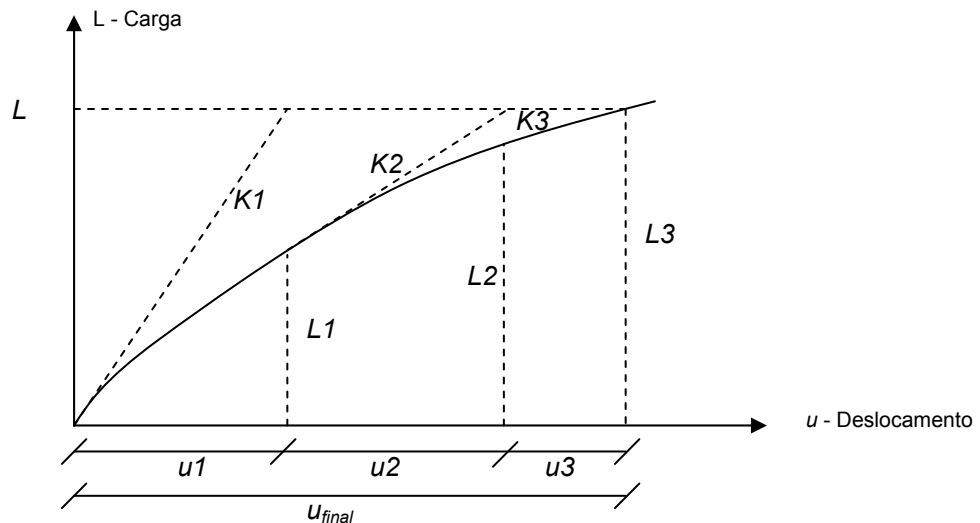


Fig. 4.7 – Método de Newton-Raphson

No exemplo da fig. 4.7 estão representadas 3 iterações:

- 1ª iteração:  $u1 = K1^{-1}(L - L0)$   
 $K1$  = matriz de rigidez inicial que corresponde ao estado indeformado da estrutura  
 $L$  = força externa  
 $L0$  = força interna que corresponde ao pré-esforço nos cabos (=0, nesta situação)
- 2ª iteração:  $u2 = K2^{-1}(L - L1)$   
 $K2$  = matriz de rigidez tangente recalculada  
 $L1$  = força interna devido ao deslocamento  $u1$

- 3ª iteração:  $u3 = K3^{-1} (L - L2)$   
 $K3$  = matriz de rigidez tangente recalculada  
 $L2$  = força interna devido ao deslocamento  $u2$

Após a 3ª iteração a força interna  $L3$  é igual ou aproximada da força externa  $L$ , sendo o deslocamento  $u4$  muito pequeno. Considera-se assim que o deslocamento obtido é aproximado do deslocamento real.

O valor aproximado do deslocamento final da estrutura é calculado com  $u = u1 + u2 + u3$ .

No programa de cálculo automático elaborado no âmbito desta dissertação é aplicado aos métodos iterativos um limitador que permite uma convergência mais eficaz e lenta. Este limitador é importante porque quando um cabo se encontra comprimido perde a rigidez, significando que quando nele é aplicada uma força o deslocamento é infinito. Isto não acontece na realidade, pois, assim que o cabo volte a estar traccionado, este ganha novamente rigidez. Para impedir estes deslocamentos infinitos, impõem-se um limite máximo em cada iteração, com o valor definido pela variável  $Disp\_st$  (ver tabela 5.1).

Na fig. 4.8 exemplifica-se como funciona esse limitador numa estrutura com 2 cabos que inicialmente estão comprimidos. Com limitador, o nó central desloca-se lentamente, permitindo aos cabos voltarem a adquirir rigidez até a estrutura atingir o equilíbrio. Enquanto que sem o limitador, o deslocamento do nó central é infinito e a estrutura não atinge o equilíbrio de esforços.

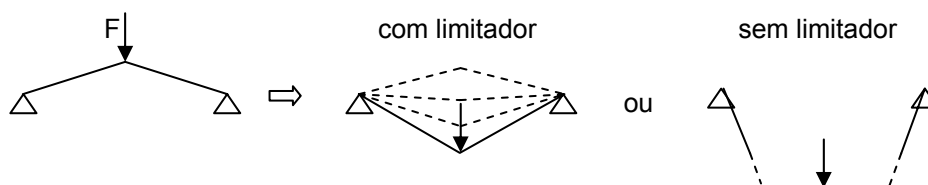


Fig. 4.8 – Uso do limitador dos deslocamentos

#### 4.4.2 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO

Uma alternativa ao método anterior consiste no mesmo processo mas com uma matriz de rigidez constante, que corresponde à inicial. Ao contrário do método de Newton-Raphson, a matriz de rigidez não se altera ao longo das iterações, o que torna o processo menos exigente em termos de poder de cálculo. Contudo o processo passa a ter uma convergência mais lenta, como exemplificado na fig. 4.9, em que são necessárias 9 iterações para se obter um deslocamento total aproximado do real.



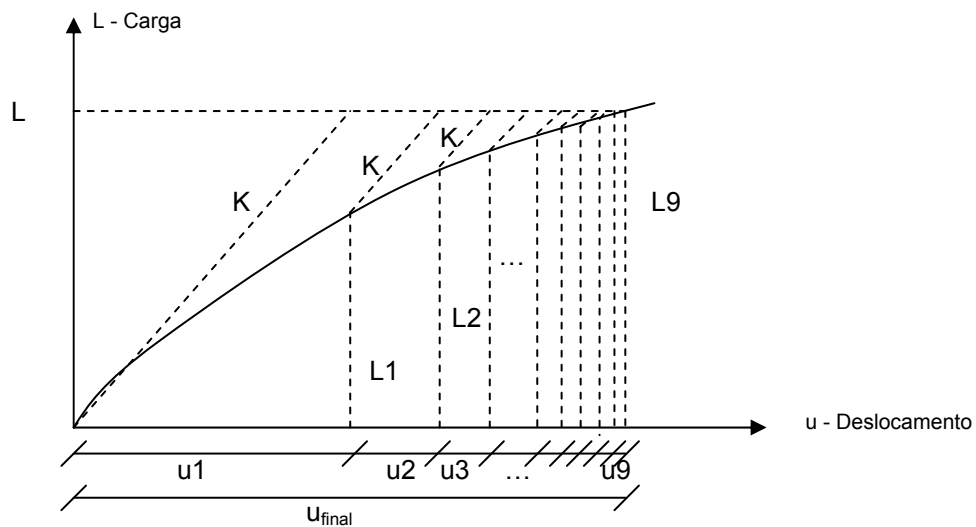


Fig. 4.9 – Método de Newton-Raphson modificado

#### 4.4.3 MÉTODO ITERATIVO DIRECTO

Ao contrário do método de Newton-Raphson, neste método em cada iteração é calculado o deslocamento total. As forças internas mantêm-se constantes ao longo do ciclo iterativo, mas a matriz de rigidez depende do deslocamento em cada iteração.

Na fig. 4.10 estão representadas 4 iterações, nas quais o deslocamento final calculado se aproxima do valor do deslocamento real.

Este método apresenta uma taxa de convergência inferior à do método de Newton-Raphson.

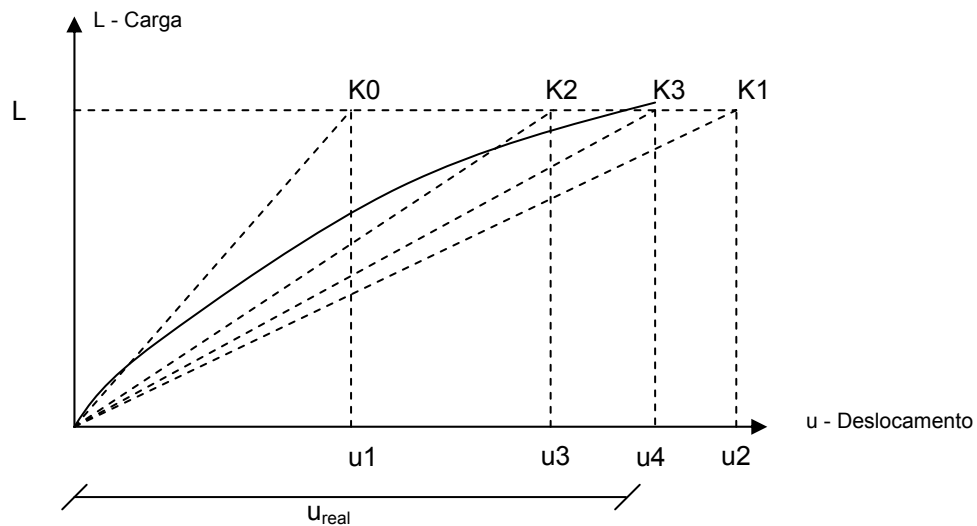


Fig. 4.10 – Método iterativo directo

#### 4.5. ANÁLISE DINÂMICA

A análise dinâmica abordada nesta dissertação incide no estudo de vibrações livres para a determinação das frequências e dos modos de vibração das estruturas de cabos. É tida em consideração a não linearidade geométrica, que provoca a alteração da rigidez dos cabos, o pré-esforço inicial e as tensões provocadas por forças externas constantes.

O estudo dinâmico das estruturas tem-se revelado cada vez mais importante e imprescindível. Antes da revolução industrial, as estruturas eram construídas com materiais pesados e as fontes de vibrações eram reduzidas, o que combinado, provocava nas estruturas uma resposta dinâmica muito reduzida. Com a evolução das técnicas construtivas e dos materiais disponíveis começou-se a construir estruturas cada vez mais leves e complexas, que resistem a cargas maiores e variáveis, o que diminui bastante o amortecimento estrutural e aumenta as vibrações geradas. Este acréscimo de vibrações é indesejado, pois origina ruídos e deslocamentos desagradáveis para o utilizador e provoca tensões que deterioram os elementos, podendo resultar em muitos casos na rotura da estrutura. Torna-se assim cada vez mais importante incluir na fase do projecto estas condicionantes, para evitar problemas futuros e reparações dispendiosas.

Os factores que influenciam a frequência e amplitude das vibrações da estrutura são as forças de excitação e a resposta da estrutura a essas forças. Estas forças podem ser periódicas, aleatórias ou impulsos, vindas de fontes como o vento, sismos e cargas internas. A resposta da estrutura vai depender da frequência natural, do amortecimento interno e da rigidez da estrutura.

Admite-se que o amortecimento interno de uma estrutura mantém-se constante para uma análise não linear, e que estes valores são conhecidos antes de iniciar a análise. Sendo assim, é necessário calcular as frequências naturais da estrutura, que são muito importantes quando se estuda estruturas submetidas a forças periódicas, pois no caso da frequência natural da estrutura igualar a frequência da força de excitação periódica ocorre ressonância, que provoca deslocamentos e tensões muito gravosos para a estrutura.

As estruturas de cabos normalmente são mais propícias a que ocorra ressonância, como no caso de pontes de cabos, que têm frequências naturais baixas e pouca rigidez. Com o programa de cálculo automático elaborado nesta dissertação pretende-se determinar as frequências e os modos de vibração da estrutura. Com base nos resultados obtidos, altera-se o desenho da estrutura de modo a que as suas frequências naturais difiram das frequências das cargas aplicadas, impedindo assim a ressonância.

Quando ocorre ressonância na estrutura esta tende a ter grandes deslocamentos, como exemplificado na fig. 4.11. Sem amortecimento os deslocamentos tendem para infinito e com amortecimento tendem a estabilizar num valor máximo.

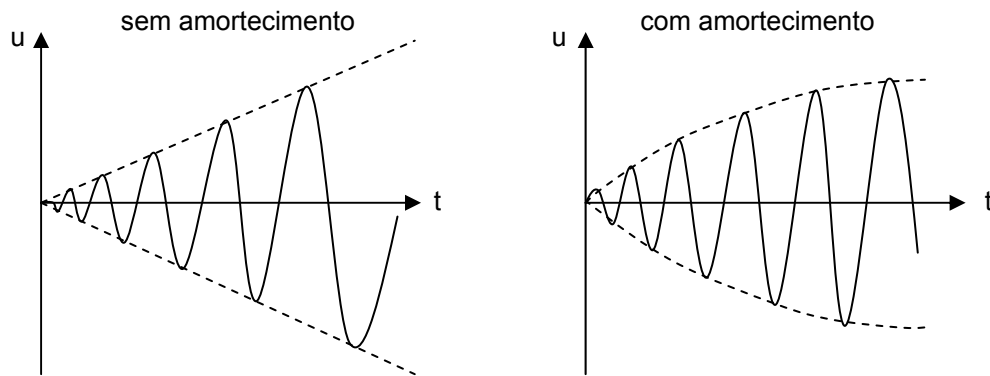


Fig. 4.11 – Resposta de uma estrutura em ressonância

#### 4.6. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DINÂMICO

As propriedades físicas fundamentais duma estrutura sujeita a forças exteriores são a massa, a rigidez e o amortecimento estrutural. A equação que traduz o equilíbrio entre as forças exteriores, de massa, de amortecimento e elásticas, é a seguinte

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k(t) v(t) = p(t) \quad (4.22)$$

onde

- $m$  - matriz de massa
- $c$  - matriz de amortecimento
- $k(t)$  - matriz de rigidez
- $p(t)$  - vector de forças exteriores
- $\ddot{v}(t), \dot{v}(t), v(t)$  - vectores das acelerações, velocidades e deslocamentos

A matriz de massa e a matriz de amortecimento variam muito pouco com o tempo, sendo pouco relevante a sua alteração. Para um sistema sem amortecimento e sem forças exteriores obtém-se a seguinte expressão

$$m \ddot{v}(t) + k(t) v(t) = 0 \quad (4.23)$$

Resolvendo a equação anterior obtêm-se os valores e os vectores próprios, que correspondem à frequência de vibração e aos modos de vibração natural.

$$-w^2 m v(t) + k(t) v(t) = 0 \quad (4.24)$$

$$(k(t) - w^2 m) v(t) = 0 \quad (4.25)$$

Para calcular os valores próprios anula-se o seguinte determinante:

$$\det(k(t) - w^2 m) = 0 \quad (4.26)$$

Conhecidos os valores próprios, é possível calcular os vectores próprios através da equação (4.25).

#### 4.7. MODOS DE VIBRAÇÃO E FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UM CABO

Através das fórmulas (4.27) e (4.28) obtêm-se as frequências naturais de um cabo para os diferentes modos representados na fig. 4.12, em que  $H$  é a força horizontal,  $u$  é a massa do cabo por unidade de comprimento,  $f$  é a flecha do cabo,  $E$  é o módulo de elasticidade,  $A$  é a área e  $I$  o momento de inércia. A expressão  $\frac{EAf^2\pi^2}{2l^4}$  expressa a rigidez normal do cabo que tem de alongar relativamente ao primeiro modo e a expressão  $\frac{EI\pi^2n^2}{l^4}$  corresponde à rigidez à flexão, que é considerada insignificante em cálculos de engenharia [8].

$$f_{(1)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{u} \left( \frac{H}{l^2} + \frac{EAf^2\pi^2}{2l^4} + \frac{EI\pi^2}{l^4} \right)} \quad (4.27)$$

$$f_{(n)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{u} \left( \frac{Hn^2}{l^2} + \frac{EI\pi^2n^2}{l^4} \right)} \quad (4.28)$$

Os modos de vibração são calculados por (4.29).

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n A_i \cos(2\pi f_i t) + B_i \sin(2\pi f_i t) \sin \left( \frac{i\pi(x-\frac{1}{2})}{l} \right) \quad (4.29)$$

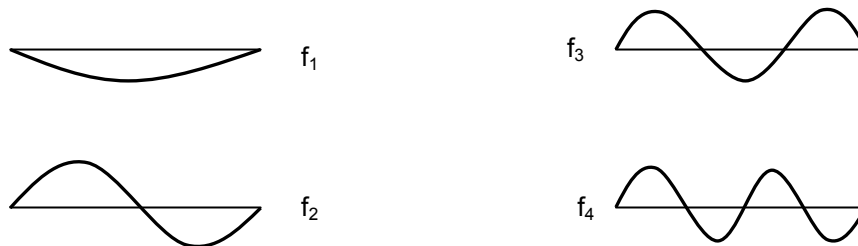


Fig. 4.12 – Modos de vibração verticais naturais

#### 4.8. MATRIZ DE MASSA

Existem 2 tipos de matriz de massa, a calculada pelo processo de diagonalização e a matriz consistente. A matriz de massa diagonal é a mais simples, exigindo menor poder de cálculo. Esta foi utilizada no programa de cálculo automático elaborado nesta dissertação.

##### 4.8.1. MATRIZ DE MASSA DIAGONAL

Para definir a matriz de massa usa-se um método simples que consiste em admitir que toda a massa se encontra concentrada nos nós de cada elemento, onde se encontram os deslocamentos.

A matriz de massa de uma barra apresenta o mesmo número de linhas e colunas, que correspondem ao número de graus de liberdade de cada barra. Em correspondência com cada grau de liberdade é somada a contribuição de cada elemento para a matriz de massa da estrutura. Cada elemento tem 2 nós, correspondendo a cada um deles metade da sua massa, como representado na fig. 4.13.

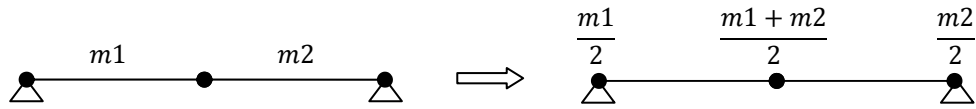


Fig. 4.13 – Distribuição da massa de cada elemento

Caso existam graus de liberdade de rotação, em geral despreza-se a sua contribuição para a matriz de massa, por ser pequena a sua inércia rotacional. Assim, a matriz de massa é uma matriz diagonal que tem termos nulos na contribuição dos graus de liberdade de rotação, como representado na fig. 4.14, para o caso de um elemento com 6 graus de liberdade. Sendo  $m$  a massa total da barra, tem-se

$$M = \frac{m}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ (sim.) & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

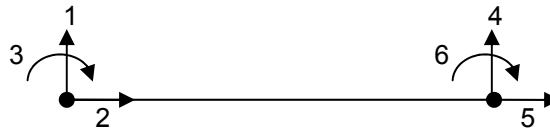


Fig. 4.14 – Matriz de massa para um elemento com 6 graus de liberdade

#### 4.8.2. MATRIZ DE MASSA CONSISTENTE

A matriz de massa consistente obtém-se por um processo semelhante ao da dedução da matriz de rigidez do elemento barra, em que aplicando uma aceleração unitária a cada grau de liberdade se determina a resultante das forças de inércia, enquanto os outros graus de liberdade estão fixos.

Para o sistema representado na fig. 4.14, obtém-se a seguinte matriz de massa consistente.

$$M = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ & & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ (sim.) & & & & 156 & -22L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$



## 5

## PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO

### 5.1. INTRODUÇÃO

No âmbito desta dissertação foi desenvolvido um programa de cálculo automático designado PCA, para o cálculo estático e dinâmico geometricamente não linear de estruturas tridimensionais, com cabos e barras de treliças, tomando em consideração a influência do pré-esforço.

O código do PCA foi escrito em Matlab, atendendo às vantagens relativamente a outros códigos, como o C++, para o objectivo em causa:

- linguagem simples
- fácil interpretação do código
- facilidade em criar e visionar as matrizes e vectores, durante e após a execução do programa
- possibilidade de compilar o código Matlab para linguagem C++ , C ou num ficheiro executável
- importação automática de dados
- fácil obtenção dos valores e vectores próprios

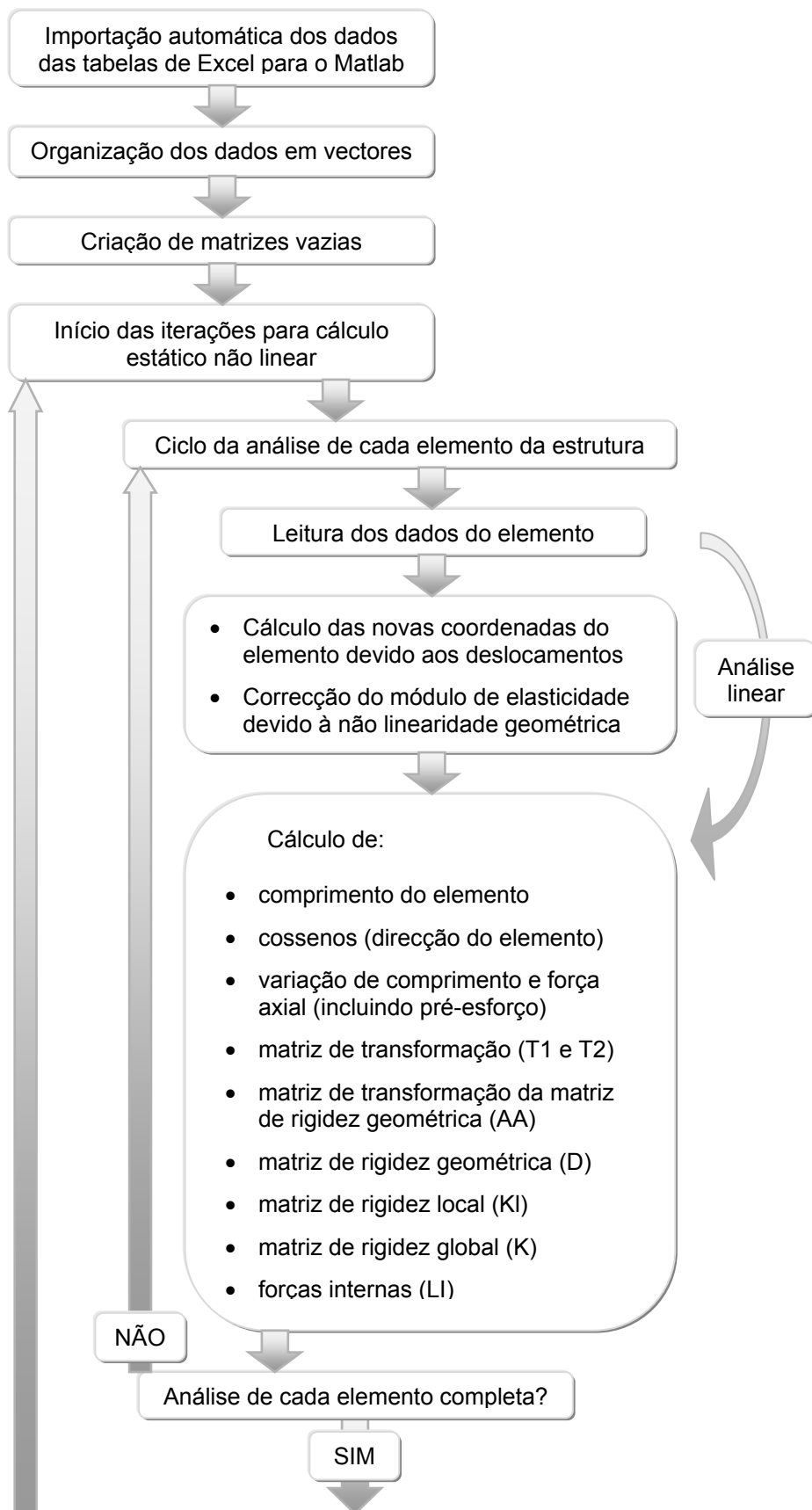
Para permitir uma melhor compreensão e organização, o código do PCA está dividido na subrotina principal Main.m e nas seguintes subrotinas: importfilexls.m; cossenos.m; transformacao.m; matriz\_AA.m; matriz\_D.m; rigidez.m; internas.m; modificacao.m; massa.m; eigen.m; drawmesh.m.

Neste capítulo explica-se o funcionamento do programa de uma maneira global e analisam-se detalhadamente as suas subrotinas, de modo a permitir uma fácil percepção das suas capacidades sem exigir conhecimentos de programação.

Nos anexos encontra-se o código completo do programa.

### 5.2. ESQUEMA GERAL DO PROGRAMA

Na fig. 5.1 está representado o esquema geral do programa para a análise estática e dinâmica, usando o método de Newton-Raphson. É esquematizando o ciclo de análise de cada elemento e o ciclo iterativo para a análise não linear geométrica.





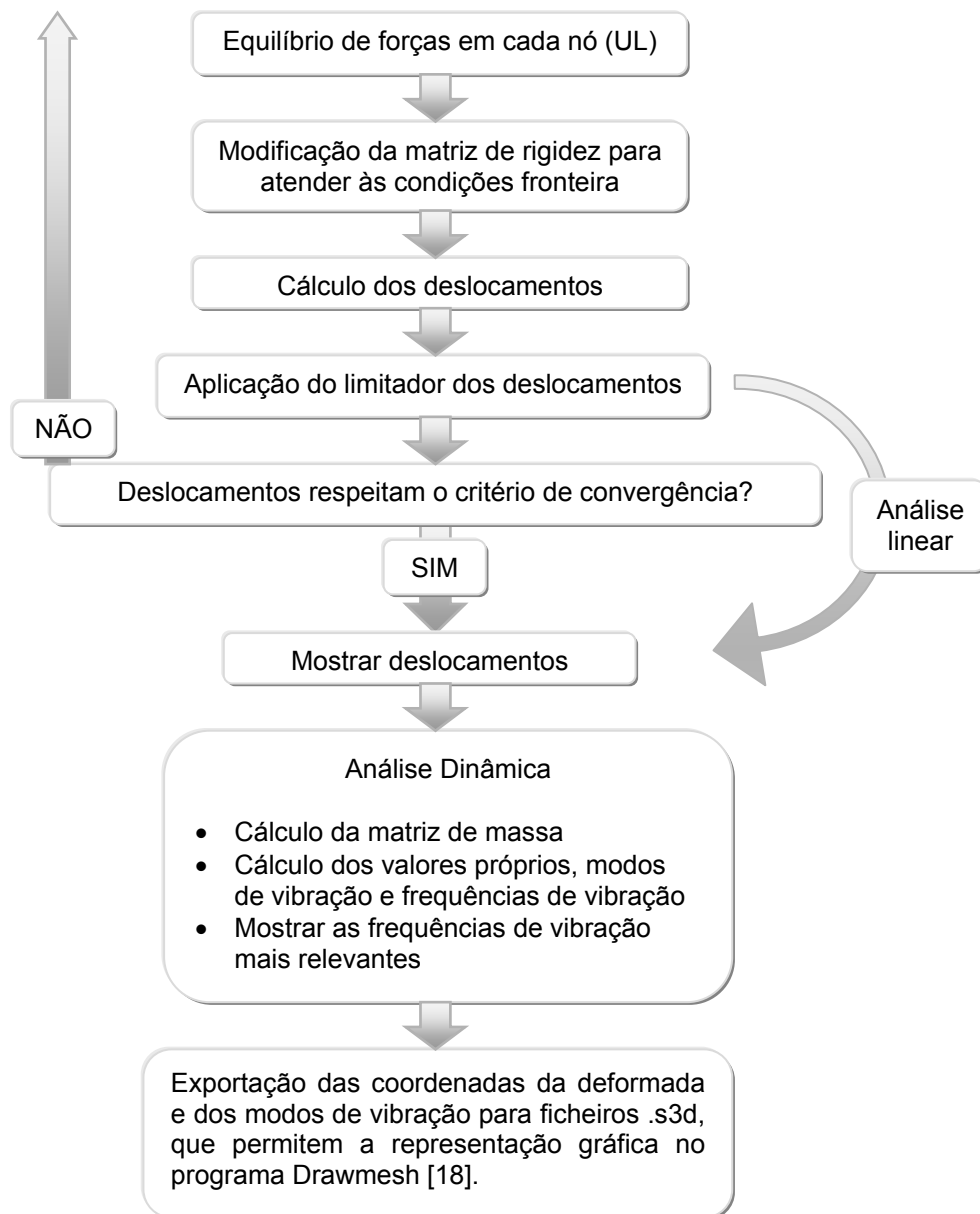


Fig. 5.1 – Sequência geral do programa de cálculo automático

### 5.3. CÓDIGO DO PROGRAMA

De acordo com a fig. 5.1, em seguida são descritos os passos do programa e o respectivo código.

#### 5.3.1. IMPORTAÇÃO AUTOMÁTICA DOS DADOS INICIAIS

Para armazenar os dados da estrutura usam-se tabelas de Excel, devido à organização e à rapidez com que os dados nela podem ser introduzidos. Os dados estão divididos em 3 ficheiros como indicado na tabela 5.1. A subrotina foi criada automaticamente pelo Matlab com a função `importwizard`, permitindo a passagem das tabelas de Excel para vectores e matrizes no Matlab. As funções que procedem à importação dos 3 ficheiros são:

```

importfilexls('input1.xls')
importfilexls('input2.xls')
importfilexls('input3.xls')

```

O código da função de importação é o seguinte:

```
function importfile1(fileToRead1)

% Importação do ficheiro.
newData1 = importdata(fileToRead1);

% Organizar a informação numa nova estrutura com 1 campo por coluna.
colheaders = genvarname(newData1.colheaders);
for i = 1:length(colheaders)
    dataByColumn1.(colheaders{i}) = newData1.data(:, i);
end

% Criar novas variáveis para introduzir os valores.
vars = fieldnames(dataByColumn1);
for i = 1:length(vars)
    assignin('base', vars{i}, dataByColumn1.(vars{i}));
end
```

Ficheiro	Variável	Descrição
input1.xls	element	Número do elemento estrutural
	na_	Número do nó inicial
	nb_	Número do nó final
	P0_	Pré-esforço aplicado no elemento (kN)
	e_	Módulo de elasticidade (MPa)
	a_	Área da secção (m <sup>2</sup> )
	r_	Peso específico (kg/m <sup>3</sup> )
	tipo_	1- Cabo; 2- Treliça
input2.xls	Nos	Número do nó
	coordx (y ou z)	Coordenadas do nó nos eixos x, y e z (m)
	DOFx (y ou z)	Grau de liberdade nos eixos (1- fixo; 0- livre)
	Lx (y ou z)	Carga aplicada no nó em cada eixo (kN)
input3.xls	ne	Número de elementos
	nn	Número de nós
	Disp_er	Critério de convergência (m)
	Disp_st	Limitador dos deslocamentos (m)
	modulo	Módulo elasticidade normal – 0
		Módulo de elasticidade equivalente – 1
	conv	Método de Newton-Raphson – 1
		Método de Newton-Raphson modificado – 2
		Método iterativo directo – 3
	ampdef	Factor de ampliação da representação da deformada
	ampmodo	Factor de ampliação da representação dos modos de vibração

Tabela 5.1 – Dados iniciais da estrutura

### 5.3.2. INÍCIO DO CICLO DE ANÁLISE ESTÁTICA

Antes de o ciclo começar procede-se a uma organização dos dados das cargas, dos graus de liberdade e das coordenadas de cada eixo para um vector global. De seguida criam-se matrizes e vectores vazios e procede-se ao início do ciclo. O código seguinte corresponde à leitura dos dados para o elemento  $i$ , variando  $i$  entre 1 e o número de elementos. O ciclo termina quando todos os elementos forem analisados e a matriz de rigidez global estiver completa, assim como o vector das forças.

```

for i=1:ne

    % Leitura dos dados do elemento
    e=1000*e_(i);
    a=a_(i);
    na=na_(i);
    nb=nb_(i);
    xa=coord((na-1)*3+1);
    ya=coord((na-1)*3+2);
    za=coord((na-1)*3+3);
    xb=coord((nb-1)*3+1);
    yb=coord((nb-1)*3+2);
    zb=coord((nb-1)*3+3);
    tipo=tipo_(i);
    P0=P0_(i);

```

### 5.3.3. COMPRIMENTO DO ELEMENTO E MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

Os elementos têm as coordenadas  $X_a, Y_a, Z_a$  no nó A e as coordenadas  $X_b, Y_b, Z_b$  no nó B, como representado na fig. 5.2. O comprimento do elemento é calculado pela seguinte fórmula

$$L_0 = \sqrt{[(X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2 + (Z_b - Z_a)^2]} \quad (5.1)$$

Em código Matlab escreve-se

```
L0=sqrt((xb-xa)^2+(yb-ya)^2+(zb-za)^2);
```

Os eixos locais de cada elemento são os eixos P, Q e R (ver fig. 5.2). O eixo P coincide com o eixo longitudinal do elemento, enquanto o eixo Q é ortogonal ao eixo P, e o eixo R é ortogonal ao eixo P e ao eixo Q. A partir destes eixos locais é possível definir a matriz de transformação que relaciona os eixos locais com os eixos globais X, Y, Z.

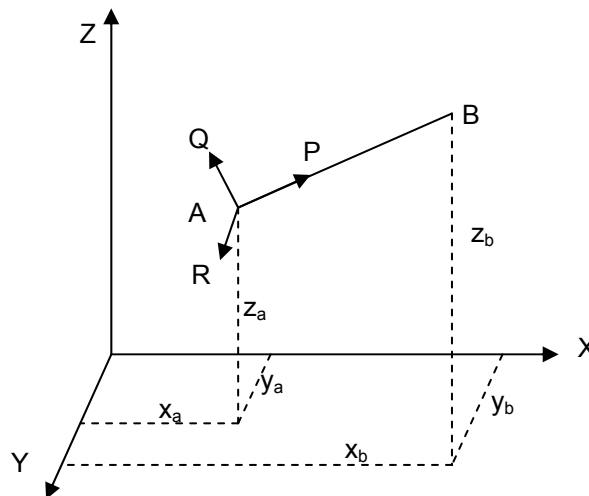


Fig. 5.2 – Representação dos eixos globais e locais do elemento

Os cossenos directores para o eixo  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são [9]

$$lp = \frac{xb - xa}{L_0} \quad mp = \frac{yb - ya}{L_0} \quad np = \frac{zb - za}{L_0} \quad (5.2)$$

$$lq = \frac{-mp}{\sqrt{lp^2 + mp^2}} \quad mq = \frac{lp}{\sqrt{lp^2 + mp^2}} \quad nq = 0 \quad (5.3)$$

$$lr = \frac{-lp \times np}{\sqrt{lp^2 + mp^2}} \quad mr = \frac{-mp \times np}{\sqrt{lp^2 + mp^2}} \quad nr = \sqrt{lp^2 + mp^2} \quad (5.4)$$

Para obter os cossenos usa-se a função cujo código é o seguinte:

```
function [lp,mp,np,lq,mq,nq,lr,mr,nr] = cossenos(xa,xb,ya,yb,za,zb,L0)

lp=(xb-xa)/L0;
mp=(yb-ya)/L0;
np=(zb-za)/L0;

if lp==0 && mp==0
    lq=0;
    mq=0;
    nq=0;

    lr=-np;
    mr=0;
    nr=0;
end

if sqrt(lp^2+mp^2+np^2)==0
    disp('element lenght = 0')
end

if sqrt(lp^2+mp^2)~=0

    lq=-mp/(sqrt(lp^2+mp^2));
    mq=lp/(sqrt(lp^2+mp^2));
    nq=0;

    lr=-lp*np/(sqrt(lp^2+mp^2));
    mr=-mp*np/(sqrt(lp^2+mp^2));
    nr=(sqrt(lp^2+mp^2));
end
end
```

#### 5.3.4. DESLOCAMENTOS DO ELEMENTO E FORÇA INTERNA

Para calcular os esforços axiais é necessário saber o alongamento existente no elemento, que é calculado com

$$e = \sqrt{[(L_0 + u)^2 + v^2 + w^2]} - L_0 \quad (5.5)$$

As variáveis  $u$ ,  $v$  e  $w$  correspondem ao alongamento do elemento segundo os eixos locais  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , respectivamente, sendo calculadas com (5.6) [9].

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_p & -m_p & -n_p & l_p & m_p & n_p \\ -l_q & -m_q & -n_q & l_q & m_q & n_q \\ -l_r & -m_r & -n_r & l_r & m_r & n_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Dx_a \\ Dy_a \\ Dz_a \\ Dx_b \\ Dy_b \\ Dz_b \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$Dx_a$ ,  $Dy_a$ ,  $Dz_a$ ,  $Dx_b$ ,  $Dy_b$  e  $Dz_b$  correspondem aos deslocamentos dos nós  $a$  e  $b$  segundo os eixos locais para cada iteração. Na primeira iteração, que corresponde à linear, os deslocamentos dos elementos são nulos, assim como  $u$ ,  $v$  e  $w$ , deste modo não existe esforço axial a menos que exista um pré-esforço em (5.7). O cálculo da força interna do elemento é efectuado com a seguinte expressão

$$P = P_0 + \frac{EA}{L_0} e \quad (5.7)$$

sendo

$P$  – Força axial actualizada  
 $P_0$  – Pré-esforço  
 $E$  – Módulo de elasticidade  
 $A$  – Área da secção transversal  
 $L_0$  – Comprimento inicial do elemento  
 $e$  – Variação de comprimento do elemento

O código destinado ao cálculo das variáveis descritas acima é:

```
u=lp*(dxb-dxa)+mp*(dyb-dya)+np*(dzb-dza);
v=lq*(dxb-dxa)+mq*(dyb-dya)+nq*(dzb-dza);
w=lr*(dxb-dxa)+mr*(dyb-dya)+nr*(dzb-dza);

E=sqrt((L0+u)^2+v^2+w^2)-L0;

P=e*a*E/L0+P0;
```

### 5.3.5. MÓDULO DE ELASTICIDADE EQUIVALENTE

O seguinte código corresponde à modelação dos cabos, modificando o valor do módulo de elasticidade para zero, no caso de o cabo estar sujeito a compressões, ou alterando-o para o valor do módulo de elasticidade equivalente, quando o cabo está sujeito a tracções.

```
if t~=1;
    if tipo==1
        if P<0
            P=0;
            e=0;
        end

        if P>0
            if modulo==1
                e=e*1/(1+((77.0085*Lh)^2)/(12*((P/1000)/a)^3));
            end
        end
    end
end
```

### 5.3.6. MATRIZ DE RIGIDEZ

A matriz de rigidez é calculada através da fórmula (5.8) [9].

$$[K] = [T'] \left[ [AA'] \frac{AE}{L_0} [AA] + [D] \right] [T] \quad (5.8)$$

onde: K – matriz de rigidez

T – matriz de transformação

T' – matriz de transformação transposta

AA – matriz de transformação da matriz de rigidez geométrica

D – matriz de rigidez geométrica

As seguintes funções são usadas para obter as matrizes acima indicadas.

Matriz T `[T1,T2] = transformacao(lp,mp,np,lq,mq,nq,lr,mr,nr);`

Matriz AA `[AA] = matriz_AA(L0,u,v,w,E);`

Matriz D `[D] = matriz_D(P,v,u,w,L0,E);`

Matriz K `[Kl,K11,K12,K21,K22,na,nb,K] = rigidez(AA,a,e,L0,D,na,nb,K,T1,T2);`

Para obter a matriz de rigidez global é necessário calcular a matriz de rigidez de cada elemento e posteriormente distribuí-la para a matriz global. Na fig. 5.3 exemplifica-se a distribuição da matriz de rigidez de um elemento que começa no nó 2 e termina no nó 4, no caso de uma estrutura de 5 nós.

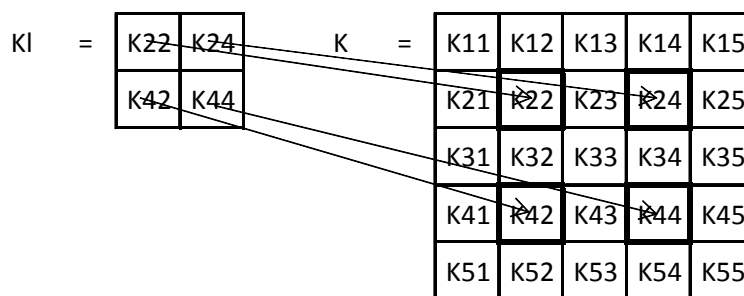


Fig. 5.3 – Distribuição da matriz local para a matriz global

A matriz de rigidez local é dada pela equação (5.9) [9].

$$[Kl] = [AA'] \frac{AE}{L_0} [AA] + [D] \quad (5.9)$$

A matriz de transformação da matriz de rigidez geométrica é calculada com (5.10), sendo usado o seguinte código [9].

$$[AA] = \begin{bmatrix} \frac{L_0+u}{L_0+e} & \frac{v}{L_0+e} & \frac{w}{L_0+e} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

```
function [AA] = matriz_AA(L0,u,v,w,E)
    AA(1,1)=(L0+u)/(L0+E);
    AA(1,2)=v/(L0+E);
    AA(1,3)=w/(L0+E);
end
```

A matriz de rigidez geométrica é calculada através de (5.11) e com o seguinte código [9].

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{P(v^2+w^2)}{(L_0+e)^3} & \frac{-Pv(L_0+u)}{(L_0+e)^3} & \frac{-Pw(L_0+u)}{(L_0+e)^3} \\ \frac{-Pv(L_0+u)}{(L_0+e)^3} & \frac{P((L_0+u)^2+w^2)}{(L_0+e)^3} & \frac{-Pvw}{(L_0+e)^3} \\ \frac{-Pw(L_0+u)}{(L_0+e)^3} & \frac{-Pvw}{(L_0+e)^3} & \frac{P((L_0+u)^2+v^2)}{(L_0+e)^3} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

```
function [D] = matriz_D(P,v,u,w,L0,E)

D(1,1)=P*(v^2+w^2)/(L0+E)^3;
D(1,2)=-P*v*(L0+u)/(L0+E)^3;
D(1,3)=-P*w*(L0+u)/(L0+E)^3;
D(2,1)=-P*v*(L0+u)/(L0+E)^3;
D(2,2)=P*((L0+u)^2+w^2)/(L0+E)^3;
D(2,3)=-P*v*w/(L0+E)^3;
D(3,1)=-P*w*(L0+u)/(L0+E)^3;
D(3,2)=-P*v*w/(L0+E)^3;
D(3,3)=P*((L0+u)^2+v^2)/(L0+E)^3;

end
```

Depois de obter a matriz de rigidez local é necessário separá-la e assembler as 4 sub-matrizes na matriz de rigidez global. As 4 sub-matrizes são calculadas através de (5.12).

$$\begin{aligned} [K_{11}] &= [T_1'] [Kl] [T_1] \\ [K_{22}] &= [T_2'] [Kl] [T_2] \\ [K_{12}] &= [T_1'] [Kl] [T_2] \\ [K_{21}] &= [T_2'] [Kl] [T_1] \end{aligned} \quad (5.12)$$

A separação da matriz local em 4 sub-matrizes é feita através da matriz de transformação que está dividida em  $T_1$  e  $T_2$ , representando os 2 nós de cada elemento (5.13). São calculadas usando a função abaixo descrita [9].

$$[T_1] = \begin{bmatrix} -l_p & -m_p & -n_p \\ -l_q & -m_q & -n_q \\ -l_r & -m_r & -n_r \end{bmatrix} \quad [T_2] = \begin{bmatrix} l_p & m_p & n_p \\ l_q & m_q & n_q \\ l_r & m_r & n_r \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

```
function [T1,T2] = transformacao(lp,mp,np,lq,mq,nq,lr,mr,nr)

T1(1,1)=-lp;
T1(1,2)=-mp;
T1(1,3)=-np;
T1(2,1)=-lq;
T1(2,2)=-mq;
T1(2,3)=-nq;
T1(3,1)=-lr;
T1(3,2)=-mr;
T1(3,3)=-nr;
T2(1,1)=lp;
T2(1,2)=mp;
T2(1,3)=np;
T2(2,1)=lq;
T2(2,2)=mq;
```

```

T2(2,3)=nq;
T2(3,1)=lr;
T2(3,2)=mr;
T2(3,3)=nr;

end

```

O código seguinte descreve a função `rigidez`, que permite a criação da matriz de rigidez local e das suas 4 sub-matrizes, posteriormente distribuindo-as para a matriz de rigidez global, como indicado na fig. 5.3.

```

function [K1,K11,K12,K21,K22,na,nb,K] =
rigidez(AA,a,E,L0,D,na,nb,K,T1,T2)

K1=AA'*AA*a*E/L0+D;
K11=T1'*K1*T1;
K12=T1'*K1*T2;
K21=T2'*K1*T1;
K22=T2'*K1*T2;

na=(na-1)*3+1;
nb=(nb-1)*3+1;

K(na:na+2,na:na+2)=K(na:na+2,na:na+2)+K11;
K(nb:nb+2,na:na+2)=K(nb:nb+2,na:na+2)+K12;
K(na:na+2,nb:nb+2)=K(na:na+2,nb:nb+2)+K21;
K(nb:nb+2,nb:nb+2)=K(nb:nb+2,nb:nb+2)+K22;

end

```

### 5.3.7. FORÇAS INTERNAS

De cada vez que o elemento tem deformações ou lhe é atribuído um pré-esforço, existem forças internas que são transferidas para os nós. O código da função `internas` calcula as forças aplicadas nos nós e adiciona-as ao vector de forças internas global.

```

function [AAa,AAb,LI] = internas(T1,T2,AA,na,nb,P,LI)

AAa=T1'*AA';
AAb=T2'*AA';

LI(na:na+2)=LI(na:na+2)+AAa(1:3)*P;
LI(nb:nb+2)=LI(nb:nb+2)+AAb(1:3)*P;

end

```



### 5.3.8. ANÁLISE GLOBAL

Após a análise individual de cada elemento passa-se a uma análise global da estrutura. Assim são calculadas as forças existentes em cada nó (UL), que correspondem à diferença entre as forças externas e internas. Em seguida modifica-se a matriz de rigidez e calculam-se os deslocamentos de cada nó.

De modo a considerar os apoios existentes na estrutura, o ficheiro de dados input2.xls tem uma variável DOF para cada eixo e para cada nó, que corresponde a 1 no caso de o grau de liberdade estar fixo, ou 0 no caso de o grau de liberdade estar livre.

Em função do estado de cada nó, é necessário alterar a matriz de rigidez para atender às condições fronteira. Para tal, podem ser analisados apenas os nós internos, removendo os nós externos da matriz de rigidez global. Outro possível método consiste em adicionar molas de rigidez infinita aos graus de liberdade dos apoios, atribuindo assim à rigidez um valor elevado (e.g.,  $10^{12}$ ) e substituindo os restantes valores da coluna e da linha por zero.

Para proceder a essa alteração, criou-se o código abaixo descrito, que permite analisar cada elemento e alterar a matriz de rigidez, como é exemplificado na fig. 5.4 para uma estrutura com 3 graus de liberdade por nó e 2 nós, onde o nó 1 se encontra fixo segundo o eixo z.

```
function [UL,K] = modificacao(DOF,UL,K,Disp,nn)
    for i=1:nn*3
        if DOF(i)==1
            for j=1:nn*3
                UL(j)=UL(j)-K(j,i)*Disp(i);
                K(i,j)=0;
                K(j,i)=0;
            end
            K(i,i)=1e12;
            UL(i)=0;
        end
    end
end
```

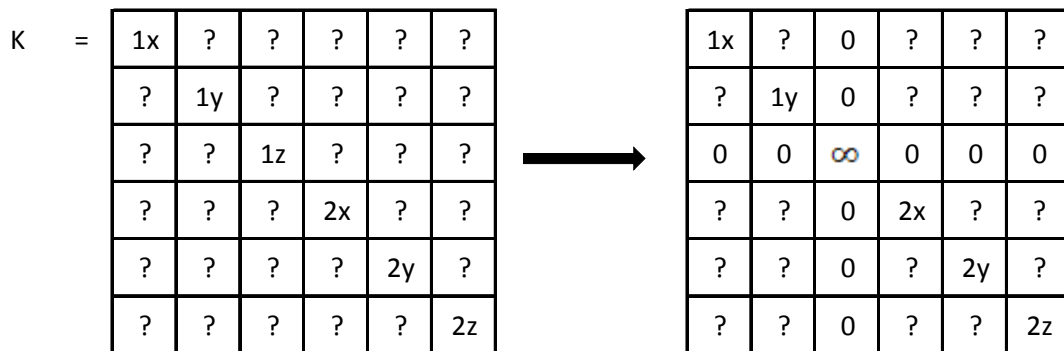


Fig. 5.4 – Modificação da matriz global

Sabendo as forças existentes em cada nó, e com base na matriz de rigidez final, obtêm-se os deslocamentos pela equação (5.14), para a iteração correspondente.

$$K u = UL \quad u = K^{-1} UL \quad (5.14)$$

O correspondente código é:

```
Disp_i=K\UL;
```

### 5.3.9. CRITÉRIO E MELHORIA DA CONVERGÊNCIA

Para melhorar as hipóteses da convergência da análise não linear através dos métodos iterativos, criou-se um código que limita os deslocamentos, como explicado na fig. 4.8, permitindo uma análise mais faseada e precisa. Assim, no código abaixo indicado, para cada grau de liberdade, o deslocamento (Disp\_i) é limitado pelo valor predefinido (Disp\_st), evitando-se assim situações em que os deslocamentos oscilam entre valores muito diferentes dos reais.

```
for i=1:nn*3
    if Disp_i(i)>=Disp_st
        Disp_i(i)=Disp_st;
    end
    if Disp_i(i)<=-Disp_st
        Disp_i(i)=-Disp_st;
    end
end
```

O ciclo não linear termina quando o critério de convergência é atingido. De acordo com este critério, assume-se que ocorre a convergência quando a diferença entre o deslocamento máximo da iteração corrente e da iteração anterior é inferior ao valor predefinido (Disp\_er), como descrito no código seguinte.

```
maxdisp=max(abs(Disp_pre-Disp));
true=maxdisp<=Disp_er;

if true==1
    cicle=0;
end
```

### 5.3.10. MATRIZ DE MASSA

A matriz de massa diagonal é obtida com o código da subrotina `massa`, que distribui metade da massa do elemento para o nó inicial e outra metade para o nó final. A massa do elemento é calculada pela equação (5.15), onde  $r$  é a peso específico,  $a$  a área e  $Le$  o comprimento inicial.

$$M = r a Le \quad (5.15)$$

```
function [M] = massa(r_,na_,nb_,M,Le,a,ne)

for i=1:ne
    r=r_(i);
    na=na_(i);
    nb=nb_(i);
    M((na-1)*3+1,(na-1)*3+1)=M((na-1)*3+1,(na-1)*3+1)+r*a*Le(i)/2;
    M((na-1)*3+2,(na-1)*3+2)=M((na-1)*3+2,(na-1)*3+2)+r*a*Le(i)/2;
    M((na-1)*3+3,(na-1)*3+3)=M((na-1)*3+3,(na-1)*3+3)+r*a*Le(i)/2;
    M((nb-1)*3+1,(nb-1)*3+1)=M((nb-1)*3+1,(nb-1)*3+1)+r*a*Le(i)/2;
    M((nb-1)*3+2,(nb-1)*3+2)=M((nb-1)*3+2,(nb-1)*3+2)+r*a*Le(i)/2;
    M((nb-1)*3+3,(nb-1)*3+3)=M((nb-1)*3+3,(nb-1)*3+3)+r*a*Le(i)/2;
end
M=M/1000;
end
```

### 5.3.11. CÁLCULO DOS VALORES E VECTORES PRÓPRIOS

A análise de vibrações é o objectivo final deste programa, e para tal é necessário calcular as frequências e os modos de vibração. O programa Matlab dispõe de uma função denominada  $[U, w2] = \text{eig}(K, M)$  [14], que permite a obtenção dos valores próprios ( $w^2$ ) e dos vectores próprios ( $U$ ), com base na matriz de rigidez ( $K$ ) e na matriz de massa ( $M$ ). A matriz  $U$  é uma matriz cheia  $n \times n$ , onde  $n$  é o número de nós multiplicado pelo número de graus de liberdade, e  $w^2$  é uma matriz diagonal  $n \times n$ .

As frequências naturais dependem de  $w^2$  e são calculadas com a equação (5.16).

$$f = \sqrt{w^2} \frac{1}{2\pi} \quad (5.16)$$

A subrotina `eigen` calcula o vector  $fc$ , que contém as 10 menores frequências de vibração.

```
function [V,w2_,w2,f,fa,fv,fc] = eigen (K_,M,nn,DOF)

[V,w2_]=eig(K_,M);

w2=diag(w2_);
w=sqrt(w2);
f=w/2/pi;
fa=f;
fv=0;

for i=1:nn*3
    if DOF(i)==0
        fv=fv+1;
    end
end

if fv>10
    fv=10;
end

for i=1:fv
    [fb,j]=min(fa);
    fa(j)=1e9;
    fc(i,1)=fb;
end
end
```

### 5.3.12. EXPORTAÇÃO DA DEFORMADA E DOS MODOS DE VIBRAÇÃO

De modo a permitir uma fácil e rápida interpretação dos resultados obtidos com o PCA, recorre-se ao programa Drawmesh [18] para realizar uma representação gráfica. Os dados exportados para os ficheiros .s3d são as coordenadas da estrutura indeformada, deformada e dos primeiros 10 modos de vibração.

Relativamente à estrutura deformada, as coordenadas exportadas para o ficheiro .s3d são a soma das coordenadas iniciais com os deslocamentos nodais ampliados. Os modos de vibração são representados como sendo a soma das coordenadas iniciais com os deslocamentos do respectivo modo. Na representação da deformada e dos modos de vibração é aplicado uma ampliação em correspondência com os valores de `ampdef` e `ampmodo`, fornecidos juntamente com os restantes dados.

O seguinte código corresponde à subrotina drawmesh.m, a qual é usada para exportar os dados relativos a cada representação gráfica para os respectivos ficheiros .s3d.

O ficheiro .s3d é constituído por 4 blocos, que contêm os seguintes dados:

- Número de elementos, nós e apoios
- Elementos e respectivos nós
- Coordenadas dos nós
- Números dos nós que correspondem a apoios

```
function drawmesh (nomes3d,element,Nos,nn,nf,ne,na_,nb_,coordf,nofix)
s3d = fopen(nomes3d,'wt');

fprintf (s3d,'PCA\n');
fprintf (s3d,'Mesh\n');
fprintf (s3d,' %1.0f ',ne);
fprintf (s3d,'%1.0f ',nn);
fprintf (s3d,'%1.0f\n',nf);

for i=1:ne
    fprintf (s3d,' %1.0f ',element(i));
    fprintf (s3d,'%1.0f ',2);
    fprintf (s3d,'%1.0f ',na_(i));
    fprintf (s3d,'%1.0f\n',nb_(i));
end

for i=1:nn
    fprintf (s3d,' %1.0f ',Nos(i));
    fprintf (s3d,'%6.3f ',coordf(i,1));
    fprintf (s3d,'%6.3f ',coordf(i,2));
    fprintf (s3d,'%6.3f\n',coordf(i,3));
end

for i=1:nf
    fprintf (s3d,' %1.0f ',nofix(i,1));
    fprintf (s3d,'%1.0f\n',nofix(i,2));
end
fclose(s3d);
```

## 6

## VERIFICAÇÃO DO PROGRAMA E ANÁLISE DE RESULTADOS

### 6.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são analisadas diferentes estruturas, com os seguintes objectivos:

- verificar se o modelo de cálculo automático funciona correctamente;
- analisar a alteração do comportamento da estrutura, devido à análise não linear;
- estudar o efeito produzido pelo pré-esforço nos cabos.

De seguida são usados 3 programas para realizar diversos testes. É usado o programa Robot, o AxisVM e o programa de cálculo automático elaborado nesta dissertação, que é designado PCA. Nas secções 6.2 e 6.3 são realizados testes a estruturas simples, devido à facilidade de analisar os resultados e compará-los entre os 3 programas. Estes resultados permitem verificar a viabilidade do PCA e compreender aspectos da análise não linear.

Através do PCA, analisa-se um exemplo de uma ponte atirantada e de um mastro atirantado, nas secções 6.3 e 6.4, respectivamente. São estudadas as diferenças entre a análise linear e a não linear, no que respeita aos deslocamentos e às frequências, sendo considerados diferentes valores de pré-esforço e diferentes configurações dos cabos.

### 6.2. VERIFICAÇÃO DA VIABILIDADE DO PROGRAMA

De seguida é efectuada a análise estática e dinâmica, linear e não linear, de uma estrutura simples em 3 dimensões, constituída por 4 treliças. Os resultados obtidos são comparados com os do Robot e com os do AxisVM, para verificar a viabilidade do PCA e tentar compreender as eventuais diferenças.

As 4 treliças são de aço e têm as seguintes características:

Tabela 6.1 – Características dos elementos

Módulo de elasticidade	Diâmetro	Área	Peso específico
210000 MPa	5 cm	19,635 cm <sup>2</sup>	7850 kg/m <sup>3</sup>

Na fig. 6.1 está representada uma estrutura com 5 nós e 4 apoios, que se encontram nos nós 1, 3, 4 e 5. Esta estrutura foi escolhida devido à sua simplicidade, para que seja fácil a análise dos seus resultados,

um vez que só são permitidos deslocamentos no nó 2, no sentido do eixo Z. A carga actuante corresponde a uma força vertical, que é aplicada nesse nó.

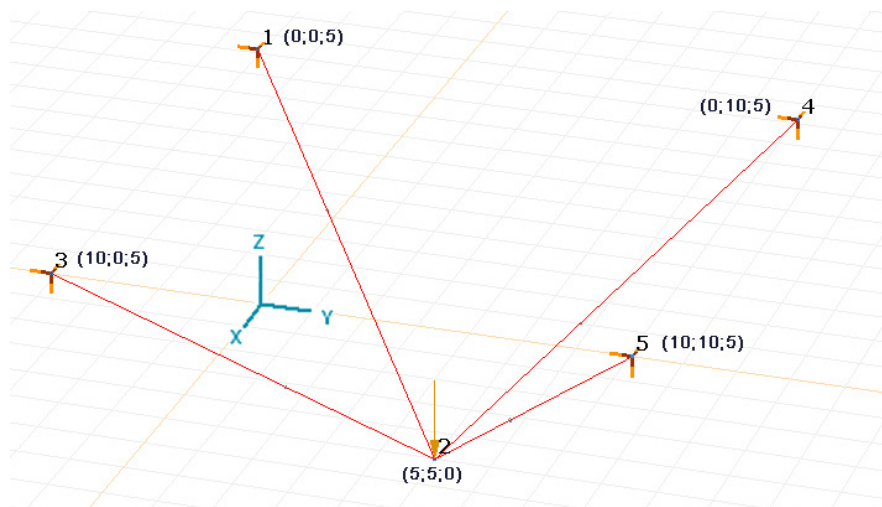


Fig. 6.1 – Representação da estrutura

### Análise estática para uma carga vertical

Após verificar que foram introduzidos os mesmos dados da estrutura no Robot, no AxisVM e no PCA, procedeu-se ao cálculo do deslocamento vertical do nó 2 para uma força vertical de 7000 kN. Esta força provoca nas barras uma tensão de 1543.7 MPa, valor que é próximo da tensão máxima de rotura.

Os deslocamentos verticais do nó 2, obtidos com os 3 programas encontram-se na tabela 6.2. Para o cálculo do deslocamento não linear foram necessárias 3 iterações no PCA, usando o método de Newton-Raphson, sendo o critério de convergência para os 3 programas de 0.01 cm.

Tabela 6.2 – Deslocamento vertical do nó 2 (cm)

	PCA	Robot	AxisVM
linear	-11.03	-11.03	-11.03
não linear	-10.59	-10.79	-10.87

Para o cálculo linear os valores obtidos são coincidentes, mas para o não linear existe uma pequena diferença entre os programas. A diferença percentual do PCA para o Robot é de 1.85%, e para o AxisVM é de 2.58%.

No PCA foi introduzida a possibilidade de analisar as estruturas para os 3 métodos de convergência descritos no capítulo 4. Deste modo se obteve o deslocamento vertical do nó 2 para os diferentes métodos. Como observado na tabela 6.3, os deslocamentos são quase idênticos nos 3 casos, sendo o método de Newton-Raphson o que necessitou de menos iterações para convergir.

Tabela 6.3 – Deslocamentos em cada iteração dos diversos métodos

Métodos	Iterações			
	1ª	2ª	3ª	4ª
Newton-Raphson	-11.0266	-10.5778	-10.5860	---
Newton-Raphson modificado	-11.0266	-10.5487	-10.5889	-10.5856
Iterativo directo	-11.0265	-10.5640	-10.5825	-10.5818

### Análise dinâmica para uma carga vertical estática

De seguida são comparadas as diferentes frequências de vibração da estrutura, calculadas pelo PCA e pelo Robot. As frequências naturais são calculadas usando a matriz de rigidez que corresponde à estrutura inalterada e as não lineares usam a matriz de rigidez proveniente da análise não linear. As frequências obtidas correspondem a 3 modos de vibração, que representam o deslocamento do nó 2 segundo os 3 eixos globais (X, Y e Z). Analisando a tabela 6.4, constata-se que as frequências lineares são idênticas para os 2 programas. Por razões que se desconhecem, no caso não linear, o programa Robot não apresenta uma frequência segundo o Z distinta das restantes.

Tabela 6.4 – Frequências em regime linear e não linear

Frequências (Hz)	PCA			Robot		
	X	Y	Z	X	Y	Z
Linear	77.61	77.61	77.61	77.60	77.60	77.60
Não linear	76.81	76.81	79.99	78.45	78.45	78.45

### Verificação dos modos de vibração

De modo a verificar a viabilidade do PCA relativamente ao cálculo dos modos de vibração, procedeu-se ao seu ensaio com uma estrutura mais complexa, de maneira a obter modos claramente distintos entre si. Os resultados obtidos pelo PCA foram comparados com os obtidos pelo AxisVM. A estrutura analisada (fig. 6.2) é constituída por 13 barras de treliça com as características indicadas na tabela 6.1.

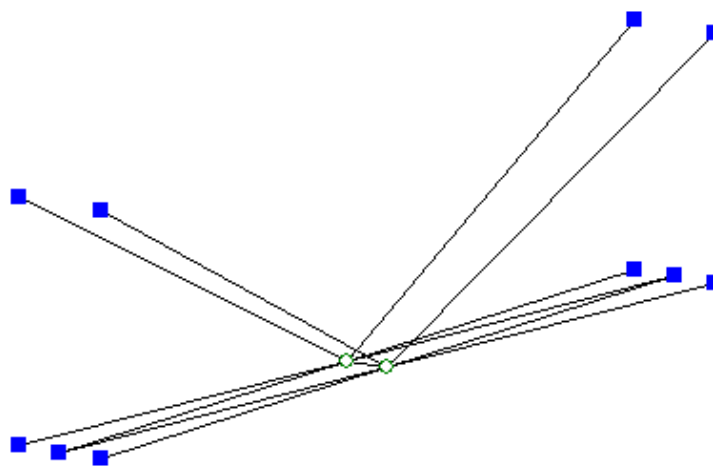


Fig. 6.2 – Representação gráfica da geometria inicial

Os modos de vibração apresentam as frequências indicadas na tabela 6.5, e encontram-se representados nas fig. 6.3 e 6.4. Os resultados obtidos com o PCA são comparados com os obtidos

pelo AxisVM, sendo as frequências e os modos de vibração correspondentes praticamente coincidentes.

Tabela 6.5 – Frequências lineares para o PCA e para o AxisVM (Hz)

	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
PCA	2.30	13.80	13.87	53.76	53.76	103.39
AxisVM	2.30	13.80	13.87	53.76	53.76	103.39

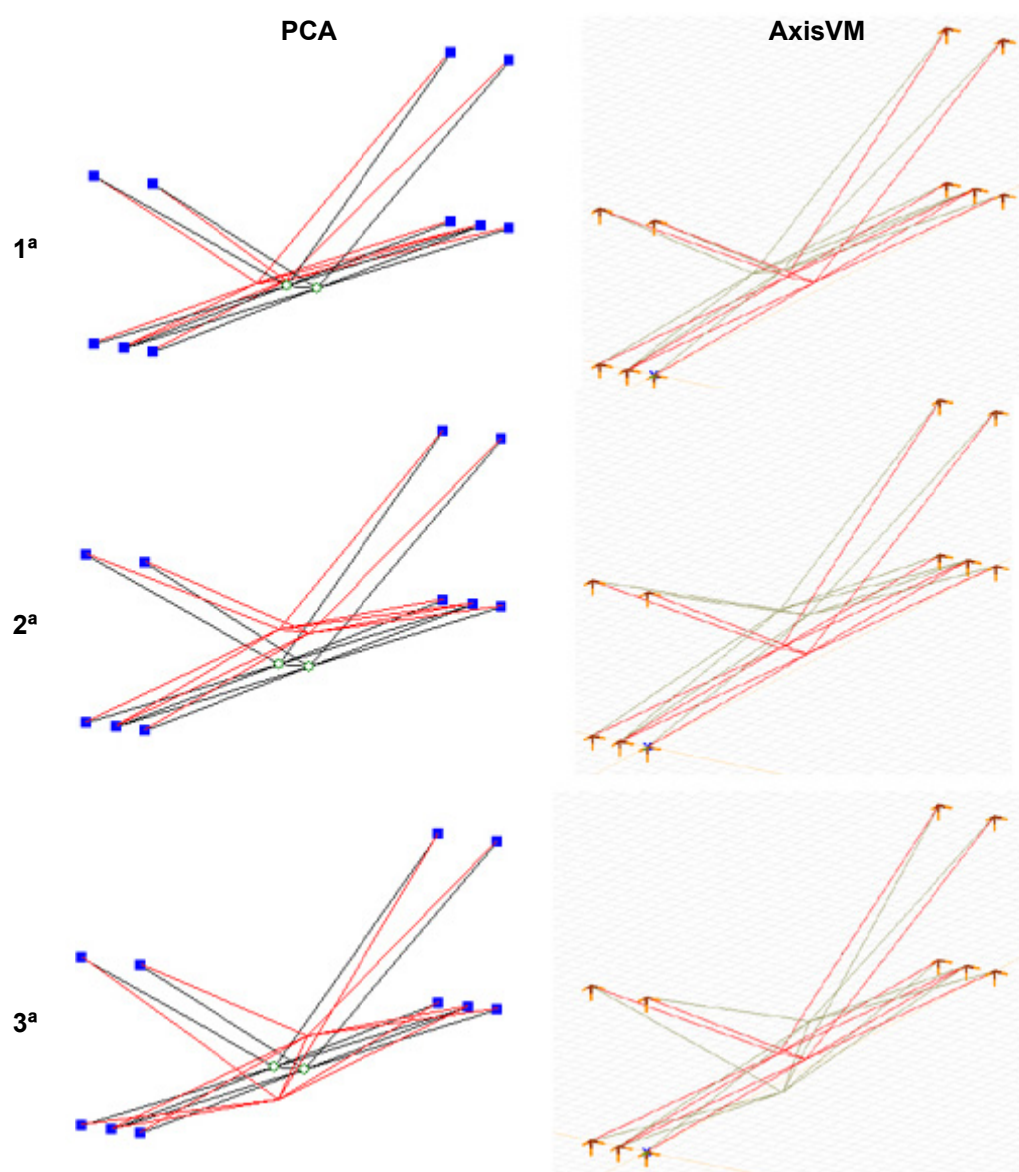


Fig. 6.3 – Comparação do 1º, 2º e 3º modo entre o PCA e o AxisVM



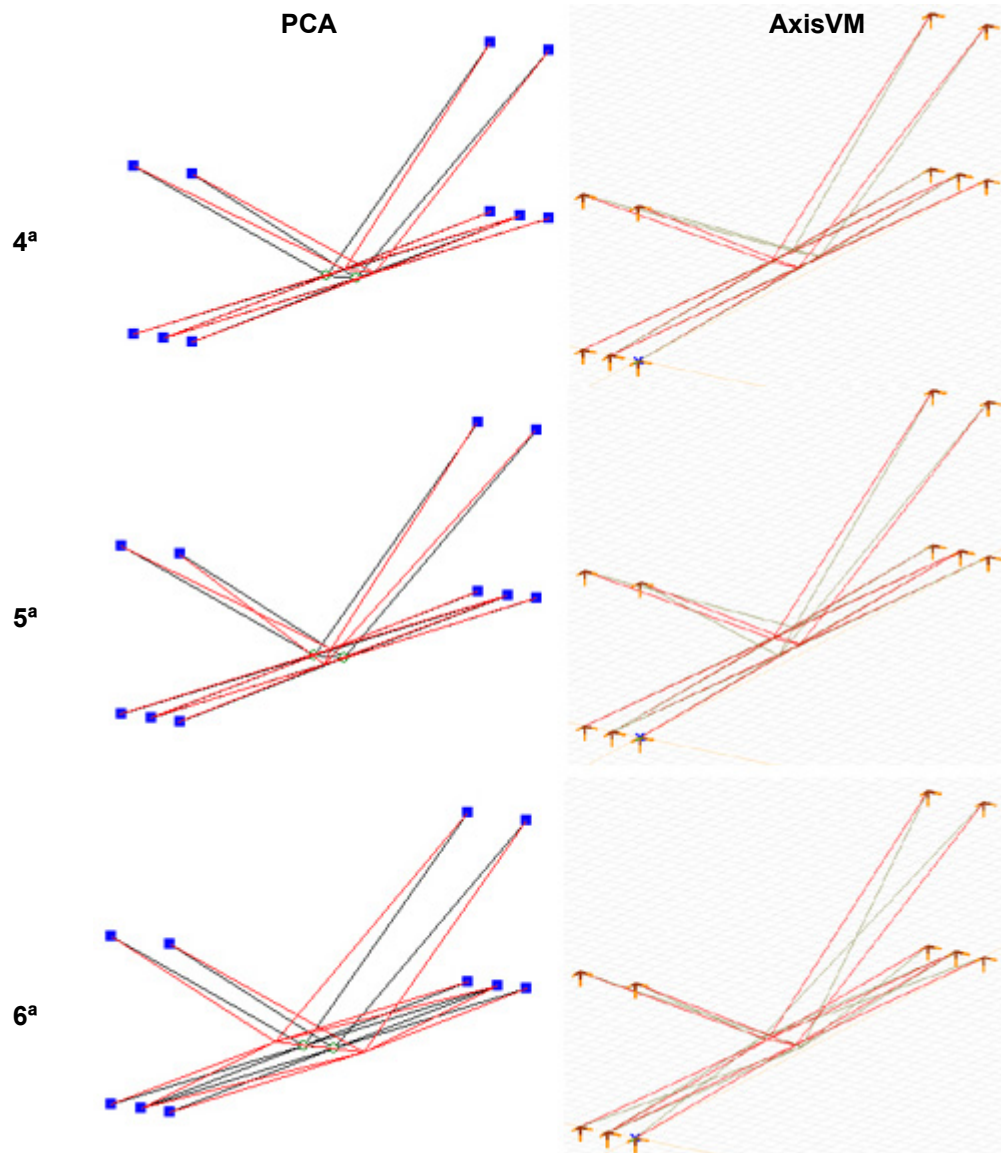


Fig. 6.4 – Comparação do 4º, 5º e 6º modo entre o PCA e o AxisVM

### 6.3. ESTRUTURA DE 9 CABOS

Nesta nova estrutura é analisado a influência do pré-esforço nas frequências de vibração, considerando a não linearidade geométrica. Os cabos têm as características indicadas na tabela 6.1. Os resultados obtidos com PCA são comparados com os obtidos pelo Robot.

A estrutura representada na fig. 6.5 é constituída por 9 cabos e 10 nós. Nos nós 1,3,4,5,7,8,9 e 10 encontram-se apoios triplos. O pré-esforço é aplicado na barra 5, provocando o deslocamento simétrico dos nós 2 e 6 na direcção do eixo do X. A aplicação do pré-esforço tem como objectivo provocar o aumento de rigidez da estrutura, e assim alterar as frequências de vibração e os respectivos modos.

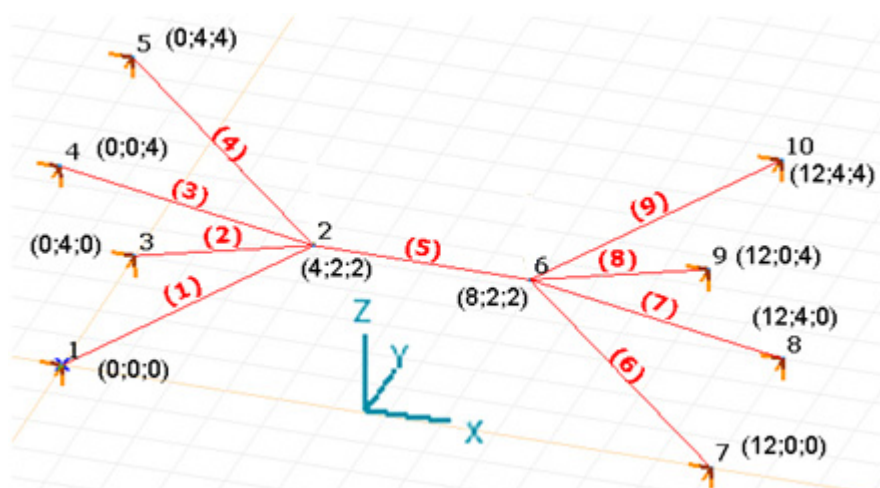


Fig. 6.5 – Representação da estrutura de 9 cabos

Para estudar o efeito do pré-esforço são efectuadas duas análises. Na primeira é considerada a não linearidade geométrica com os cabos modelados como treliças, e na segunda é usado nos cabos o módulo de elasticidade equivalente.

#### Análise não linear considerando os cabos como barras de treliça

O pré-esforço é aplicado na barra 5 com diferentes grandezas, sendo o valor máximo da força axial de 3000 kN para o PCA, e a variação máxima de temperatura de 661.59 °C para o Robot. Na tabela 6.6 encontram-se os deslocamentos do nó 2, assim como a 1ª, 3ª e 5ª frequência para o estado não pré-esforçado para o pré-esforço máximo. Os deslocamentos e as frequências são quase idênticos para os 2 programas, o que confirma a viabilidade do PCA. A estrutura não teve grandes alterações com a aplicação do pré-esforço, logo os resultados da análise linear são semelhantes aos da não linear. Devido a este facto, as frequências de vibração sofreram uma alteração insignificante na análise não linear, pois a geometria da estrutura manteve-se quase inalterada.

Tabela 6.6 – Deslocamentos do nó 2 (mm) e frequências de vibração (Hz)

	1000 kN ou 220.53 °C		2000 kN ou 441.06 °C		3000 kN ou 661.59 °C	
	Linear	Não linear	Linear	Não linear	Linear	Não linear
PCA	2.322	2.319	4.645	4.638	6.967	6.952
Robot	2.323	2.320	4.646	4.637	6.969	6.950

	s/pré-esforço			3000 kN ou 661.59 °C		
	1ª	3ª	5ª	1ª	3ª	5ª
PCA	88.41	88.41	176.82	88.41	89.03	176.97
Robot	88.39	88.39	176.78	88.00	88.39	176.78

Usando o ficheiro criado pelo PCA e que contém os deslocamentos obtidos para o caso de pré-esforço de 3000 kN, representa-se a deformada da estrutura com o Drawmesh. Na fig. 6.6 a deformada encontra-se representada a vermelho.

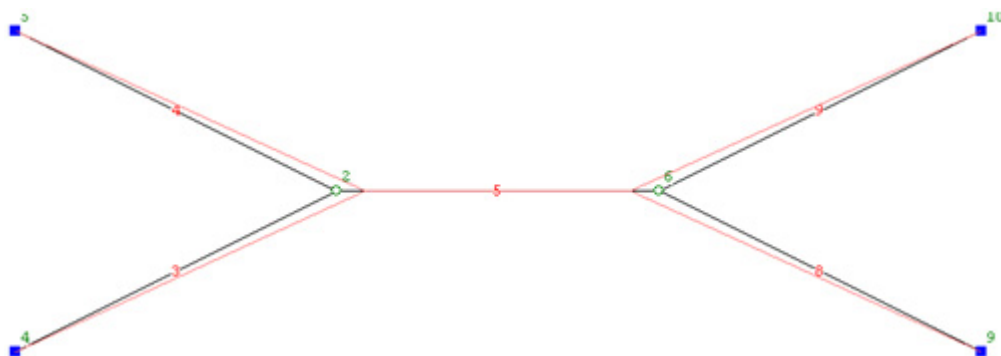


Fig. 6.6 – Deformada vista de frente para a carga de pré-esforço

### Análise não linear usando o módulo de elasticidade equivalente nos cabos

Apesar da deformada da estrutura ser quase insignificante na análise não linear, ao considerar-se que o módulo de elasticidade dos cabos varia com a força aplicada, obtém-se uma estrutura cuja rigidez se altera significativamente com o pré-esforço aplicado.

Na tabela 6.7 encontra-se a 1ª, 3ª e 5ª frequência de vibração da estrutura, para um aumento progressivo do pré-esforço da barra 5. Como o módulo de elasticidade equivalente varia com o comprimento dos cabos, analisou-se a mesma estrutura mas com comprimentos diferentes. Estes cálculos foram realizados no PCA. De forma a entender a que modo de vibração corresponde cada frequência, criou-se uma representação do 1º, 3º e 5º modo, usando o Drawmesh. Estes encontram-se representados a vermelho na fig. 6.7.

Tabela 6.7 – Frequências de vibração (Hz)

L = 12 m		10 kN	50 kN	100 kN	250 kN	500 kN	1000 kN	3000 kN	s/pré-esforço
	1ª	0.71	6.69	18.44	56.92	81.50	87.45	88.37	88.41
	3ª	0.93	6.82	18.56	57.00	81.61	87.66	88.99	88.41
	5ª	1.21	13.28	36.81	113.81	163.02	174.94	176.90	176.82
L = 36 m									
	1ª	0.17	0.58	1.34	4.68	9.82	13.06	13.97	13.73
L = 108 m									
	1ª	0.03	0.13	0.19	0.35	0.66	1.25	1.66	1.60

Com o aumento do pré-esforço aumenta a rigidez da estrutura e, por consequência, as frequências. Na fig. 6.8 encontram-se 3 gráficos que relacionam a primeira frequência de cada estrutura com um pré-esforço actuante, permitindo analisar a sua influência. Esta só é significativa para valores de tensão do cabo inferiores a 900 kN, ou seja 30% da tensão máxima.

Na estrutura de 12 m, até valores de 300 kN de pré-esforço, isto é, 10% da carga máxima, o aumento das frequências é linear. Para a de 36 m, este intervalo de aumento linear atinge os 500 kN e para a de 108 m, atinge os 1000 kN. De seguida as frequências tendem a estabilizar e mantêm-se quase inalteradas até à carga máxima de rotura.

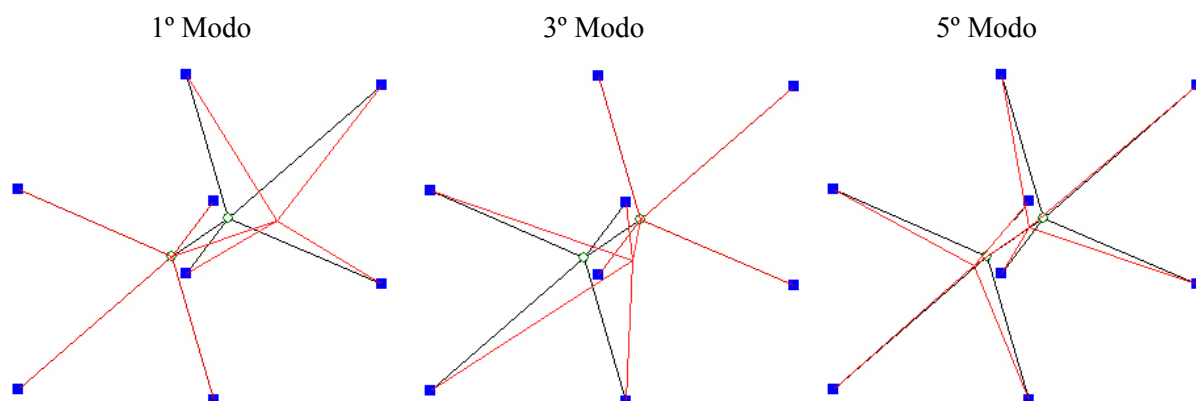


Fig. 6.7 – Representação do 1º, 3º e 5º modo de vibração

O módulo de elasticidade equivalente é directamente proporcional ao comprimento horizontal dos cabos, logo conclui-se que para estruturas de cabos de pequenas dimensões o efeito do pré-esforço não é significativo na alteração das frequências de vibração. O módulo de elasticidade equivalente dos cabos mantém-se constante para tensões de utilização superiores a cerca de 40% da tensão de rotura.

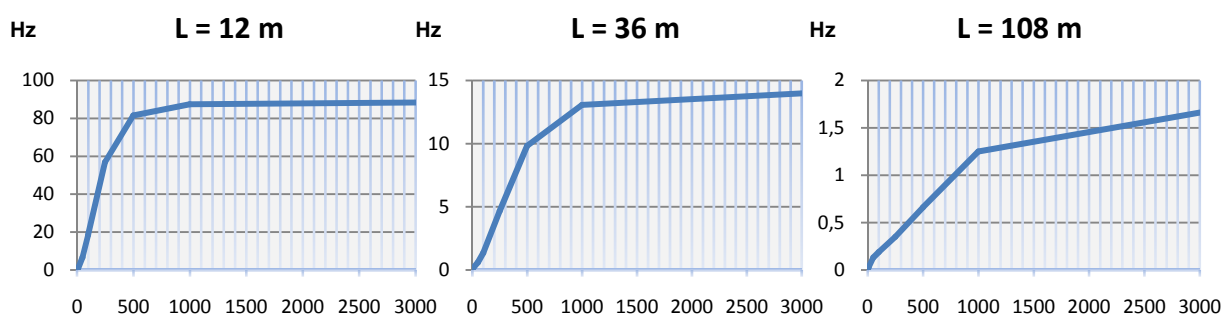


Fig. 6.8 - Relação da 1ª frequência de vibração com a tensão nos cabos

#### 6.4. PONTE ATIRANTADA

No capítulo 3 é descrita a importância das vibrações nas pontes pedonais e a influência que estas têm no seu dimensionamento. No mesmo âmbito é analisada no PCA o exemplo de uma ponte atirantada (fig. 6.10), de modo a compreender a influência que a análise não linear e o pré-esforço têm nas vibrações desta ponte.

O tabuleiro desta estrutura (fig. 6.9) é constituído por barras de treliça dispostas de modo a conferir-lhe a rigidez necessária. O seu comprimento total é de 100 m, e as suas extremidades estão fixas segundo as 3 direcções de translação. O tabuleiro é constituído por segmentos de 5 m, com 2 m de largura e 1 m de altura, e encontra-se à cota 0 m. Os cabos encontram-se apoiados à cota 25 m e estão ligados ao tabuleiro de 10 em 10 m. Os elementos usados para o tabuleiro são barras de treliça em aço, cujas características se encontram indicadas na tabela 6.1. Os cabos têm as mesmas características mecânicas.

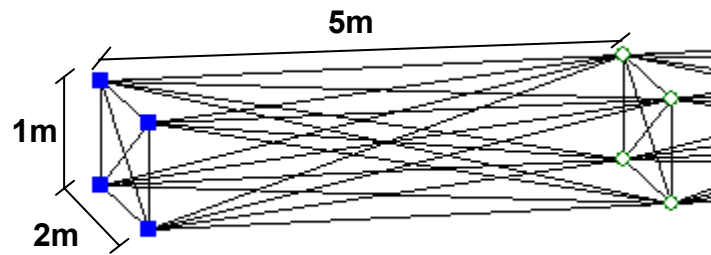


Fig. 6.9 – Segmento do tabuleiro

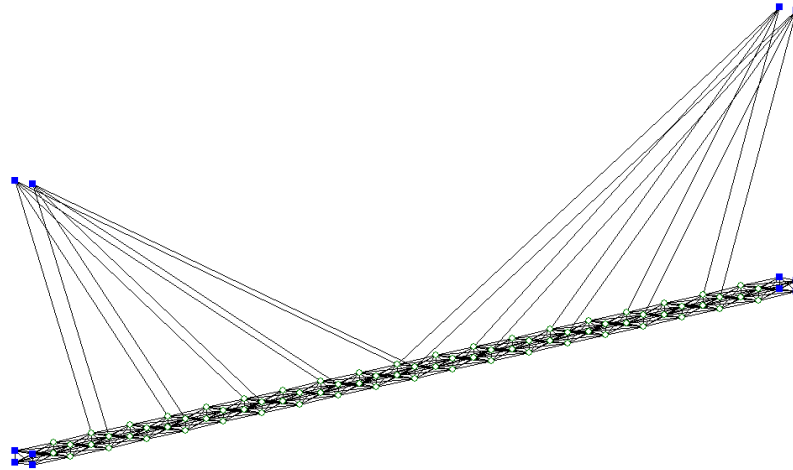


Fig. 6.10 – Representação da ponte atirantada

#### 6.4.1 – ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA PARA CARGAS VERTICAIS

De seguida é efectuado o cálculo dos deslocamentos lineares e não lineares para diferentes cargas verticais, as quais são aplicadas nos pontos de intersecção entre os cabos e o tabuleiro. A deformada de metade do tabuleiro encontra-se representada na fig. 6.11. Os deslocamentos obtidos para a outra metade do tabuleiro são simétricos aos da tabela 6.8. A ponte foi analisada para 4 valores da força vertical, 10 kN, 50 kN, 250 kN, 1000 kN. Para as cargas verticais de 1000 kN, é obtida uma força de tracção de 2277 kN nos cabos que ligam ao centro do tabuleiro. Nestes cabos obtêm-se tensões de 1157 MPa, tornando os seus módulos de elasticidade equivalentes próximos dos módulos normais. Foram obtidos os deslocamentos verticais para 5 nós que correspondem ao 10, 18, 26, 34 e 39. Verifica-se que as maiores diferenças entre os deslocamentos lineares e os não lineares são para cargas elevadas.

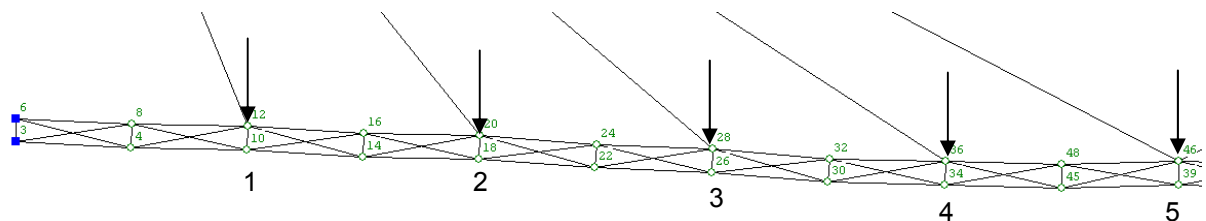


Fig. 6.11 – Representação de parte da deformada para cargas verticais de 50kN (cm)

Tabela 6.8 – Deslocamentos verticais para diferentes cargas verticais (cm)

		Nós				
		1	2	3	4	5
10 kN	Linear	-0.14	-0.29	-0.52	-0.75	-0.75
	Não Linear	-0.13	-0.28	-0.50	-0.71	-0.71
50 kN	Linear	-0.69	-1.44	-2.61	-3.73	-3.77
	Não Linear	-0.69	-1.45	-2.60	-3.68	-3.71
250 kN	Linear	-3.44	-7.22	-13.06	-18.64	-18.87
	Não Linear	-3.44	-7.23	-13.01	-18.28	-18.41
1000 kN	Linear	-13.75	-28.87	-52.25	-74.60	-75.48
	Não Linear	-13.86	-29.33	-51.12	-68.60	-68.76

As frequências obtidas para as diferentes cargas estão representadas na tabela 6.9. Verifica-se um aumento destas para cargas maiores, o que indica um aumento de rigidez para a estrutura. Nas fig. 6.12 e 6.13, encontram-se os 5 modos de vibração correspondentes às frequências analisadas. A representação foi criada através do Drawmesh usando as coordenadas fornecidas pelo PCA. A interpretação da representação dos modos de vibração é fundamental para relacionar o modo com a respectiva frequência.

Analisando a tabela 6.9 observa-se que as frequências verticais diminuem bastante para forças de 10kN, facto que é devido aos cabos se encontrarem pouco traccionados, logo o seu módulo de elasticidade equivalente é reduzido, conferindo pouca rigidez à estrutura. À medida que a carga aumenta, aumenta também a rigidez dos cabos e por consequência os movimentos da estrutura encontram-se mais restringidos, aumentando as frequências. Sendo  $f_{V1}$  a frequência mais influenciada pela existência de cargas aplicadas.

Tabela 6.9 – Frequências de vibração para diferentes cargas aplicadas

	10 kN	50 kN	250 kN	1000 kN
$f_{H1}$ (Hz)	1.0167	1.0386	1.1354	1.4615
$f_{V1}$ (Hz)	0.6746	3.2532	5.9456	6.3618
$f_{V2}$ (Hz)	2.8729	4.9592	6.7533	6.7173
$f_S$ (Hz)	2.6831	4.3863	6.4602	6.5845
$f_T$ (Hz)	5.1828	7.3148	8.7744	9.0280

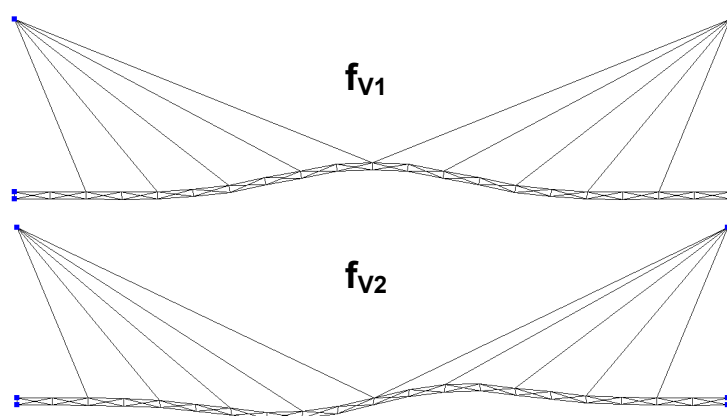


Fig. 6.12 – Modos de vibração verticais para a ponte atirantada

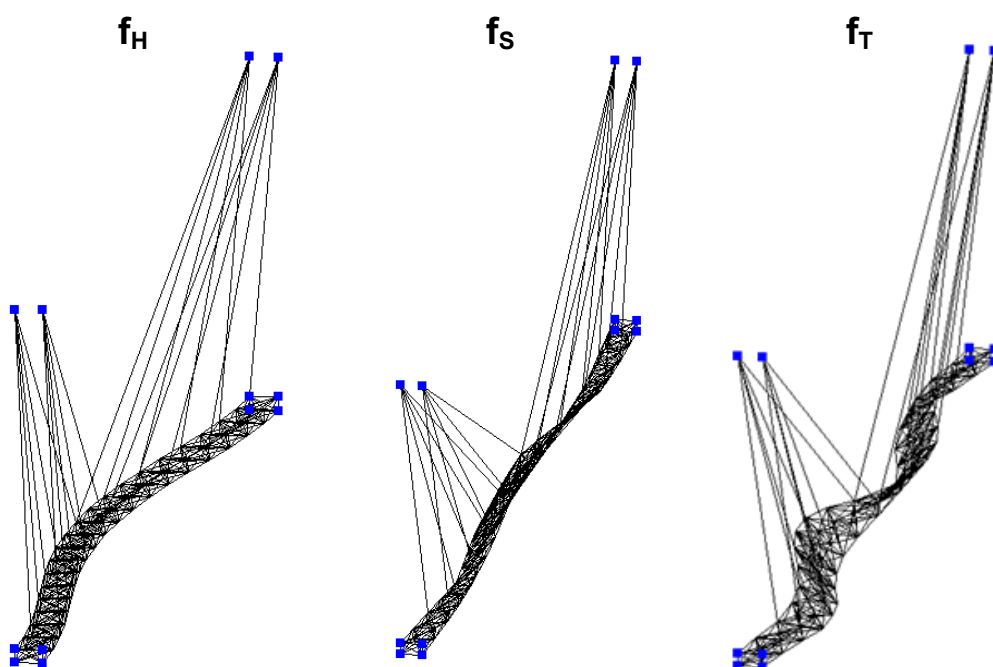


Fig. 6.13 – Modos de vibração da ponte atirantada

#### 6.4.2 – ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA PARA CARGAS DE PRÉ-ESFORÇO

De modo a compreender o aumento de rigidez da ponte com o aumento das cargas procedeu-se a uma análise usando diferentes cargas de pré-esforço nos cabos, assim como cargas verticais diferentes aplicadas nos nós do tabuleiro.

Tabela 6.10 - Deslocamentos verticais para diferentes combinações de cargas

Combinação	Cargas Verticais	Pré-esforço		Nós				
				1	2	3	4	5
1	5 kN	50 kN	Linear	0.22	0.36	0.49	0.76	1.02
			Não Linear	0.22	0.36	0.49	0.76	1.02
2	10 kN	100 kN	Linear	0.44	0.72	0.99	1.51	2.03
			Não Linear	0.44	0.72	0.99	1.51	2.03
3	25 kN	250 kN	Linear	1.10	1.79	2.47	3.78	5.08
			Não Linear	1.10	1.80	2.47	3.77	5.05
4	100 kN	1000 kN	Linear	4.40	7.17	9.86	15.10	20.33
			Não Linear	4.39	7.18	9.93	15.11	20.17
5	200 kN	2000 kN	Linear	8.81	14.34	19.73	30.21	40.66
			Não Linear	8.74	14.37	19.99	30.16	39.87

A ponte é suficientemente rígida, pois a diferença entre os deslocamentos lineares e não lineares é pequena, mesmo para grandes cargas. À medida que as cargas aumentam, verifica-se também um aumento nas frequências, isto, porque a rigidez dos cabos aumenta. A frequência horizontal é a que menos se altera, e a primeira vertical é a que mais aumenta. A partir da combinação 4 não há uma alteração significativa, visto que os cabos se encontram bastante traccionados e a sua rigidez é próxima da máxima.

Observa-se que para verificar o critério de instabilidade aerodinâmica são preferíveis as combinações de cargas mais baixas, sendo a razão  $f_T/f_{V2}$  superior para estes casos.

Os critérios relativos às frequências aceitáveis para uma ponte pedonal, analisados no capítulo 3, indicam que a primeira frequência horizontal deve ser afastada de 1 Hz, a primeira vertical de 2 Hz e a razão entre a de torção e a vertical correspondente deve ser superior a 2.5. Considerando estes parâmetros e analisando a tabela 6.11, entende-se que a estrutura é menos propícia a ter problemas de ressonância para combinações de pequeno valor.

Tabela 6.11 – Frequências de vibração para diferentes combinações de cargas

	1	2	3	4	5
$f_{H1}(\text{Hz})$	1.062	1.066	1.078	1.124	1.185
$f_{V1}(\text{Hz})$	0.532	0.668	1.603	5.225	5.762
$f_{V2}(\text{Hz})$	1.465	1.578	2.613	8.093	8.714
$f_s(\text{Hz})$	2.541	2.585	3.104	6.217	6.697
$f_T(\text{Hz})$	5.281	5.322	5.880	8.639	8.978
$f_T/f_{V2}$	3.604	3.372	2.250	1.067	1.030

#### 6.4.3 – ESTUDO PARAMÉTRICO DAS FREQUÊNCIAS

Usando o PCA realizou-se um estudo paramétrico tendo por base a ponte pedonal atirantada da fig. 6.10. É considerado que os cabos se encontram traccionados por uma força de pré-esforço de 1000 kN e são aplicadas cargas verticais de 100 kN no tabuleiro, como exemplificado na fig. 6.11. A



comparação entre os diferentes tipos de disposição dos cabos e configurações permite analisar quais as melhores soluções de modo a respeitar os critérios relativos às frequências, descritos no capítulo 3.3.

As soluções estudadas encontram-se representadas na fig. 6.12. Existem 3 perfis longitudinais combinados com diferentes perfis transversais.

- A solução 1-A serviu de base às restantes soluções.
- Na alternativa 1-B colocam-se os apoios dos cabos afastados por 6 m, ao invés de 2 m, de modo a melhorar a rigidez horizontal.
- Na solução 1-C colocam-se cabos num plano horizontal, de modo a impedir os deslocamentos nesta direcção.
- Na solução 2-A os cabos encontram-se por baixo do tabuleiro de modo aumentar a rigidez vertical.
- A solução 2-B corresponde à combinação da 2-A com a 1-B.
- Na solução 3 o número de cabos é duplicado, mas a sua área bem como o pré-esforço é metade da solução 1-A.

Para compreender as diferenças entre as diversas soluções, foram calculadas as frequências mais relevantes no dimensionamento de uma ponte pedonal. Estas correspondem à primeira horizontal ( $f_H$ ), à primeira e segunda verticais ( $f_{V1}$  e  $f_{V2}$ ), à combinação da flexão com a torção ( $f_S$ ) e à primeira de torção ( $f_T$ ). A representação destes 5 modos de vibração encontra-se nas fig. 6.12 e 6.13, e as respectivas frequências na tabela 6.12.

A análise da tabela 6.12 permite compreender a influência que a geometria da estrutura tem no seu comportamento dinâmico.

- Comparando 1-A com 1-B, e 2-A com 2-B, verifica-se que o aumento da distância entre os apoios dos cabos não resultou numa diferença significativa nas frequências. Existe no entanto um aumento para  $f_H$  e uma diminuição para  $f_T$ .
- O aumento do número de cabos é o factor que mais altera as frequências, ao conferir à estrutura maior rigidez. Logo, a solução 3, apresenta os valores mais elevados para  $f_{V1}$ ,  $f_{V2}$ ,  $f_S$  e  $f_T$ . Acontece a mesma situação comparando 1-A com 2-A, pois o aumento do número de cabos contribuiu para um aumento da rigidez.
- A solução 1-C proporciona um aumento de 64% de  $f_H$  relativamente a 1-A.
- As diferentes soluções não alteraram significativamente a razão  $f_T/f_{V1}$ , que serve de critério para a instabilidade aerodinâmica. No entanto, esta razão diminuiu para a solução 2-A e 2-B, relativamente à 1-A.

De modo a melhorar as características da ponte pedonal atirantada e obter frequências de vibração afastadas das críticas, a melhor solução é uma combinação entre a solução 3 e a 1-C. Assim obtêm-se frequências horizontais afastadas de 1Hz, verticais afastadas de 2Hz e uma razão  $f_T/f_{V1}$  superior a 2.5.

Tabela 6.12 – Frequências para as diferentes soluções da ponte atirantada

	Soluções					
	1-A	1-B	1-C	2-A	2-B	3
$f_{H1}$ (Hz)	1.0685	1.0842	1.7557	1.1745	1.2501	1.3842
$f_{V1}$ (Hz)	5.2233	5.218	4.9872	5.9414	5.9357	6.7198
$f_{V2}$ (Hz)	6.2406	6.232	6.2784	7.4874	7.4794	8.2299
$f_5$ (Hz)	6.1423	5.9907	5.8266	6.5006	6.3804	8.1164
$f_7$ (Hz)	8.5112	8.4765	8.3975	9.3373	9.1853	11.1816
$f_T/f_{V1}$	1.3638	1.3602	1.3375	1.2471	1.2281	1.3587

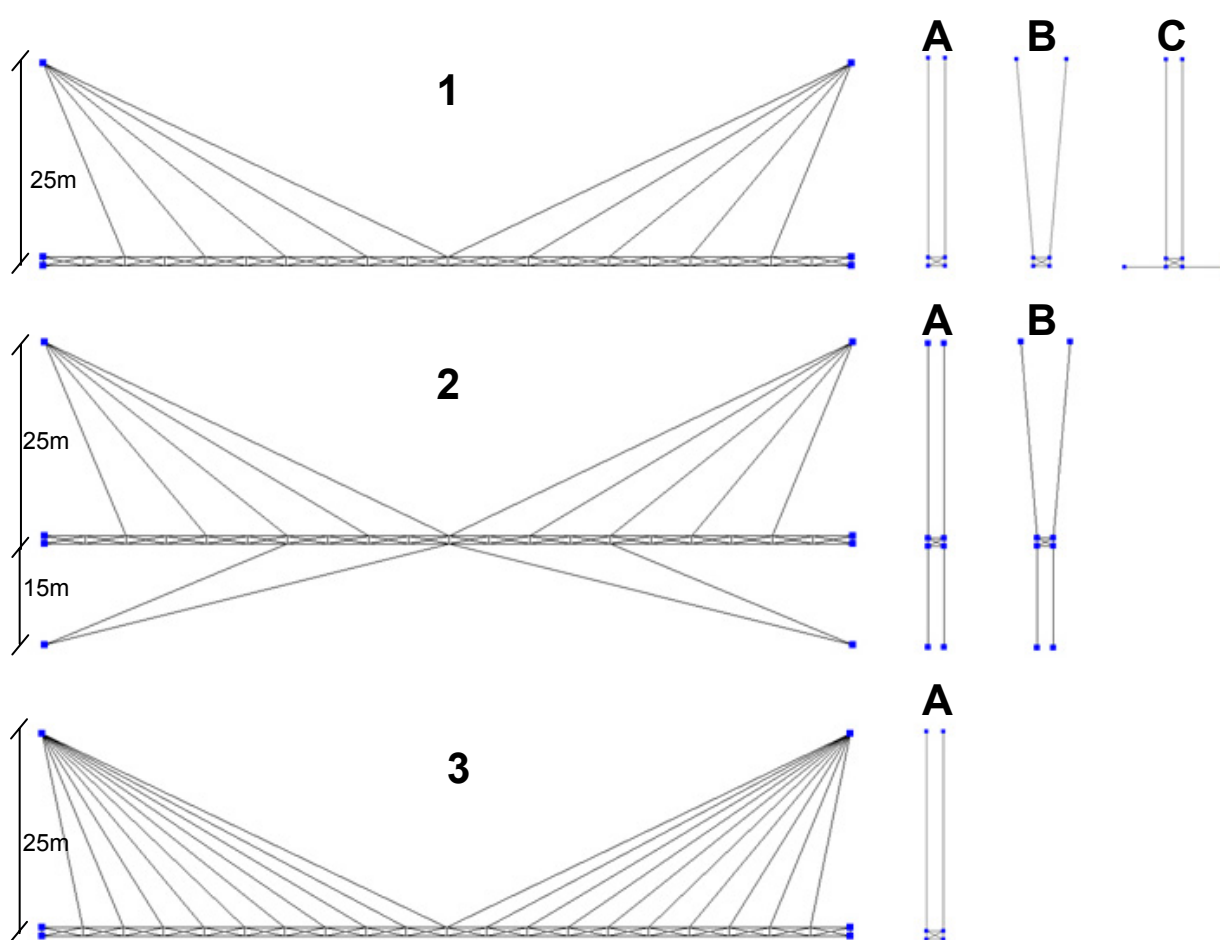


Fig. 6.14 – Geometria das diferentes soluções para a ponte atirantada

### 6.5 – MASTRO ATIRANTADO

Os mastros atirantados são estruturas que em geral apresentam uma grande altura e que são usadas para telecomunicações, tendo no topo instaladas as antenas. Grande parte da sua rigidez é conferida pelos cabos ancorados no terreno, visto que a estrutura sem os cabos não resiste ao grande momento provocado pelo vento no apoio.

O comportamento dinâmico de um mastro atirantado sobre a acção do vento é uniforme para valores críticos desta força, sendo este aspecto devido à influência não linear dos cabos. O pré-esforço nos cabos tem um papel importante. Para valores de pré-esforço bastante elevados, a estrutura comporta-se de um modo linear, porém para valores baixos a resposta é irregular, pois as propriedades dinâmicas dependem da amplitude da vibração. A contínua variação dos deslocamentos no ponto superior de ancoragem dos cabos e a consequente alteração da sua força provocam uma variação contínua na rigidez e nas frequências naturais de cada cabo [3].

### 6.5.1 – ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA PARA DIFERENTES PRÉ-ESFORÇOS NOS CABOS

O mastro em seguida analisado tem 100 m de altura e de 25 em 25 m encontra-se atirantado por cabos de aço de 5 cm de diâmetro. É constituído por elementos de treliça, também de 5 cm de diâmetro, que se encontram dispostos de modo a conferir a rigidez estrutural necessária, como representado na fig. 6.15.

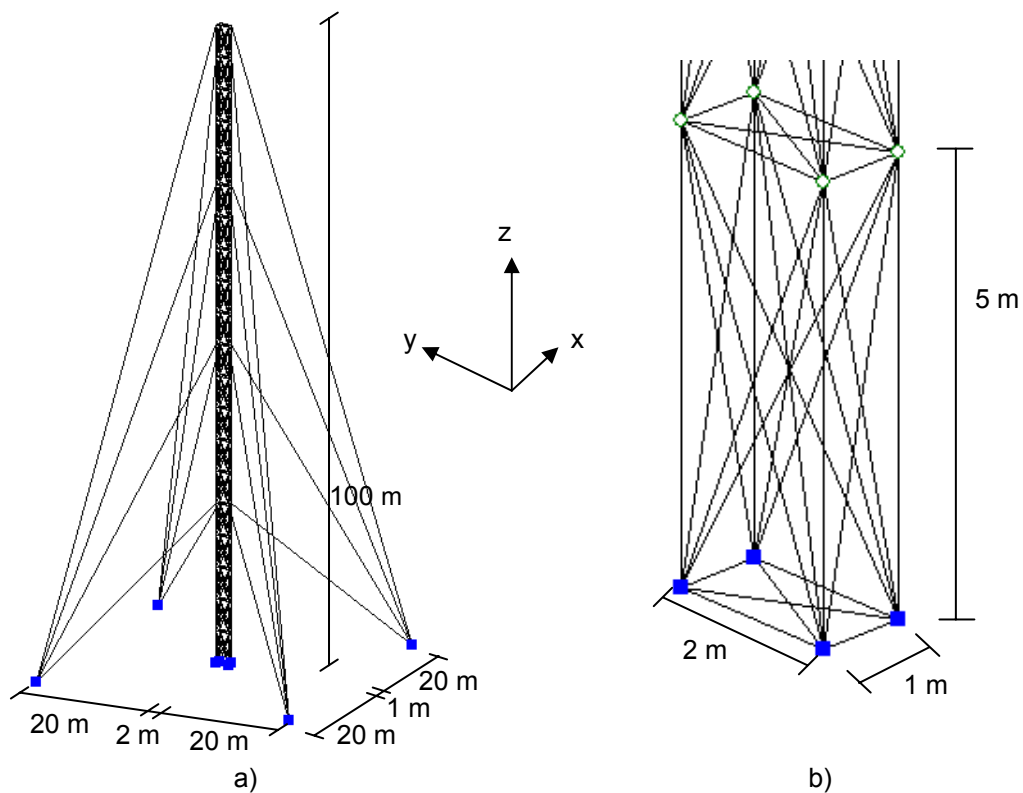


Fig. 6.15 – a) representação da estrutura b) segmento de 5m de altura

De seguida, usando o PCA, são calculados os deslocamentos para diferentes valores do pré-esforços nos cabos, sendo o seu valor de rotura aproximadamente 3000 kN. É considerada a força do vento igual a 1 kN/m<sup>2</sup>, sendo assim introduzida uma força de 5 kN, no sentido do eixo X, nos nós de uma das faces, como representado na fig. 6.16. Nesta figura encontra-se a deformada da estrutura na direcção X, a preto, ampliada 100 vezes, e a vermelho está representada a malha indeformada. Os valores dos deslocamentos de cada nó encontram-se na tabela 6.13. O pré-esforço, após 1400 kN, provoca o colapso da estrutura. Isto porque na análise não linear, ao considerar a excentricidade provocada pelo vento combinada com os esforços induzidos pelos cabos, provoca na estrutura uma grande instabilidade. O mesmo já não acontece com a análise linear, como se pode observar na fig. 6.17, onde se encontram as deformadas da estrutura para as 2 análises, para um pré-esforço de 1500 kN.

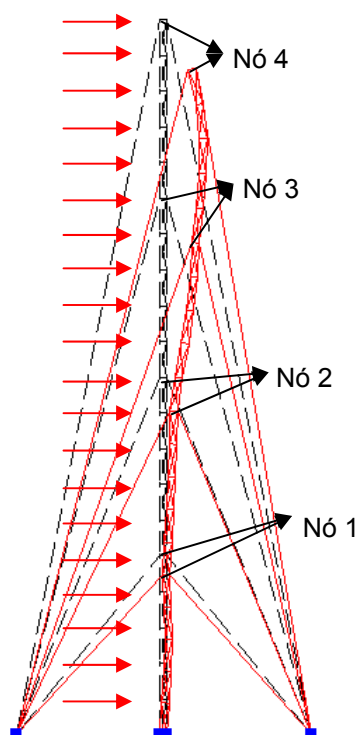


Fig. 6.16 – Representação da deformada do mastro para um valor de pré-esforço até 1400 kN

Tabela 6.13 – Deslocamentos dos nós para diferentes valores do pré-esforço (cm)

		Nó 1			Nó 2			Nó 3			Nó 4		
		X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
200 kN	Linear	0.36	-0.02	-0.76	1.48	-0.01	-1.33	4.26	-0.01	-1.75	4.03	0.00	-2.10
	Não Linear	0.38	-0.02	-0.76	1.48	-0.01	-1.33	3.96	-0.01	-1.75	4.21	0.00	-2.07
700 kN	Linear	0.33	-0.09	-2.67	1.36	-0.06	-4.73	4.41	-0.04	-6.19	3.96	-0.02	-7.10
	Não Linear	0.35	-0.09	-2.67	1.46	-0.06	-4.74	3.95	-0.04	-6.18	4.20	-0.02	-7.06
1400 kN	Linear	0.28	-0.18	-5.36	1.15	-0.11	-9.46	4.89	-0.08	-12.39	3.72	-0.04	-14.10
	Não Linear	0.31	-0.18	-5.34	1.44	-0.12	-9.50	3.93	-0.08	-12.40	4.19	-0.04	-14.04
1500 kN	Linear	0.49	0.19	-5.74	1.54	0.13	-10.24	4.01	0.08	-13.34	4.24	0.04	-14.88
	Não Linear	1.65	0.12	-4.49	-8.37	0.08	-17.10	22.09	0.05	-18.64	-5.17	0.04	-20.88

A estrutura apresenta estabilidade suficiente para que os deslocamentos lineares não difiram muito dos não lineares, até os cabos atingirem o valor de pré-esforço de cerca de 1400 kN. A partir deste valor, os deslocamentos lineares diferem bastante dos não lineares, pois a estrutura não tem rigidez suficiente para manter o seu aspecto inicial, apresentando assim grandes deslocamentos para a análise não linear, como representado na fig. 6.17. Os deslocamentos encontram-se ampliados 25 vezes e representados a vermelho. O deslocamento máximo segundo o eixo X, para a análise linear, é de 4.24 cm, correspondendo ao topo da torre, enquanto que para a análise não linear existe um deslocamento máximo de 44.32 cm.

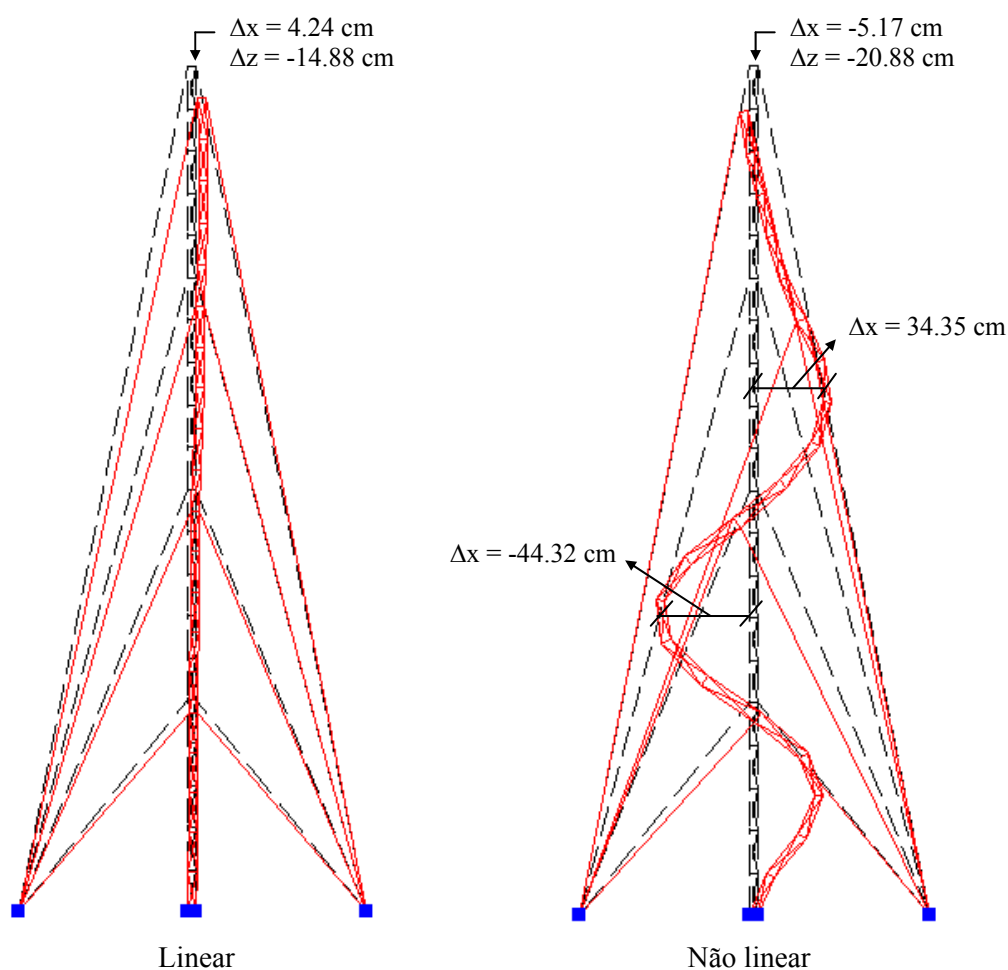


Fig. 6.17 – Comparação entre a deformada linear e não a linear para um pré-esforço de 1500 kN

Em seguida são analisadas as frequências de vibração e os respectivos modos (fig. 6.18) no caso do mastro atirantado. As frequências correspondem a 3 tipos de modos de vibração:

- Segundo o eixo X: 1°, 3°, 5°, 7°, 10°
- Segundo o eixo Y: 2°, 6°, 8°
- Torção: 4°, 9°

Tabela 6.14 – Frequências para os diferentes valores do pré-esforços (Hz)

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
200 kN	0.432	0.527	0.973	1.387	1.536	1.919	3.349	3.689	3.797	4.449
400 kN	0.910	1.030	1.474	1.672	2.110	2.522	3.859	3.940	4.032	5.107
600 kN	1.260	1.408	1.779	1.862	2.468	2.820	3.783	4.168	4.187	5.102
800 kN	1.427	1.595	1.891	2.003	2.618	2.856	3.689	4.264	4.271	5.001
1000 kN	1.499	1.681	1.900	2.119	2.674	2.788	3.578	4.287	4.343	4.874
1200 kN	1.529	1.722	1.853	2.221	2.672	2.689	3.459	4.273	4.415	4.735
1400 kN	1.538	1.742	1.760	2.314	2.526	2.686	3.340	4.247	4.480	4.588

Na tabela 6.14 encontram-se as frequências para diferentes valores de pré-esforço até 1400 kN, isto porque para valores superiores esta estrutura fica instável. Apenas a primeira frequência dos eixos X e Y e as 2 de torção é que são proporcionais ao valor do pré-esforço. As restantes atingem um valor máximo para um valor de pré-esforço inferior a 1400 kN. As deformadas dos modos representados na fig. 6.18 encontram-se ampliadas 10 vezes.

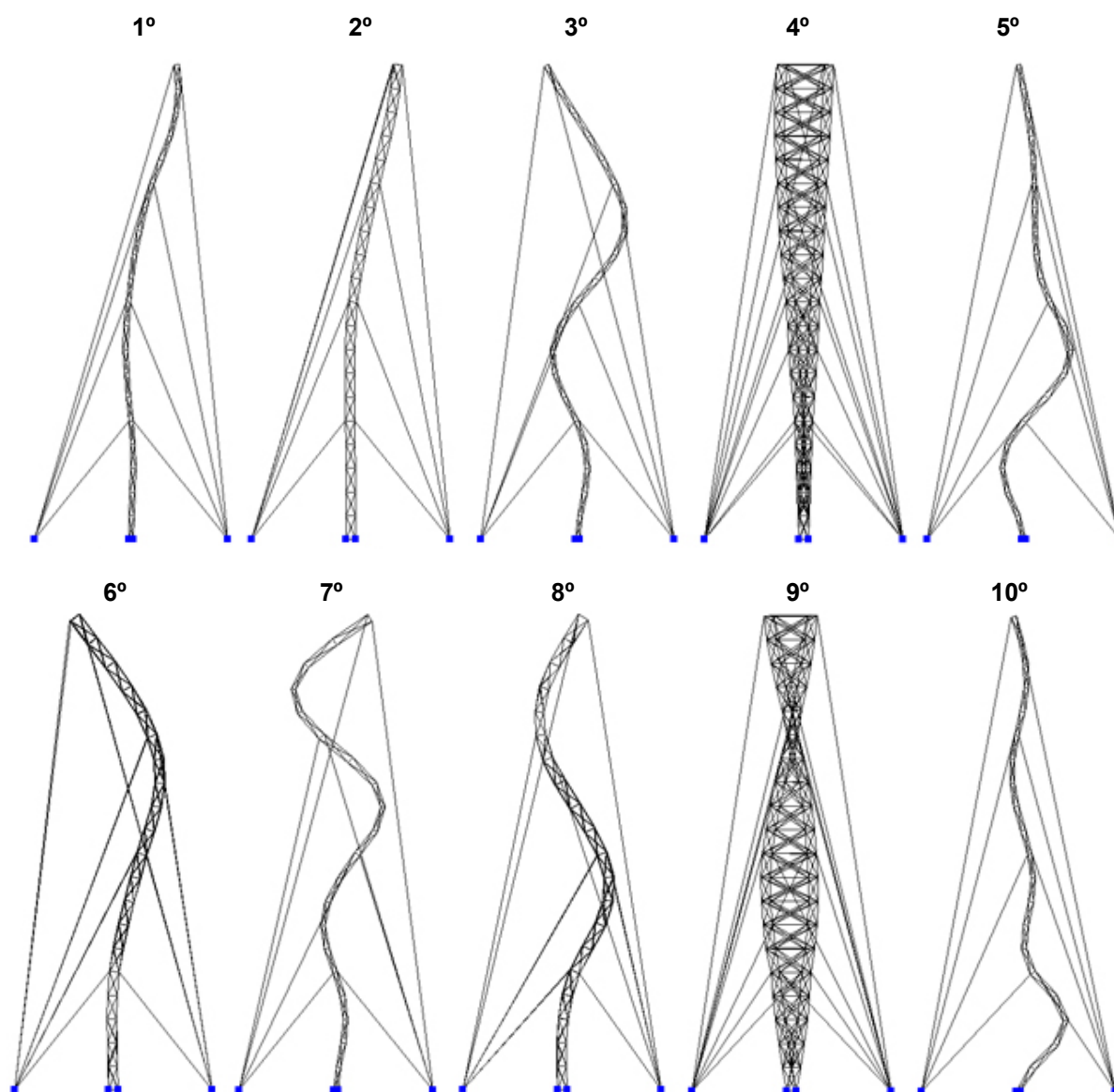


Fig. 6.18 – Modos de vibração do mastro atirantado

### 6.5.2 – COMPARAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS DE DIVERSAS SOLUÇÕES

Em seguida são comparadas 5 diferentes soluções para o mastro atirantado, estando apenas aplicado o pré-esforço nos cabos e tendo este o valor de 500 kN. As 5 soluções apresentam diferentes configurações dos cabos, sendo 4 destas variações da solução 1. Apresentam-se em seguida as principais diferenças entre as soluções 2 a 5 e a solução 1.

- Solução 2: é constituída pelo dobro dos cabos, tendo estes metade da área e metade do pré-esforço, relativamente às outras soluções.
- Solução 3: a distância entre a ancoragem de cada cabo e o mastro passa para metade, relativamente à solução 1.
- Solução 4: apresenta um número superior de distintas localizações das ancoragens no terreno.
- Solução 5: os cabos encontram-se ancorados no mastro numa posição mais elevada, relativamente à solução 1.

Analisando a tabela 6.15, observa-se que a colocação de mais cabos no mastro aumenta todas as frequências, o que significa que este fica com maior rigidez nesta configuração. Ao aproximar as ancoragens do centro do mastro, as frequências apresentam valores mais baixos, relativamente às outras soluções. Ancorando os cabos numa posição mais elevada no mastro, obtêm-se frequências ligeiramente superiores segundo os eixos X e Y, mas uma redução na frequência de torção. À solução 4 corresponde uma menor rigidez da estrutura, relativamente à solução 1.

Tabela 6.15 – Frequências dos modos de vibração de cada solução (Hz)

	$f_{x1}$	$f_{x2}$	$f_{y1}$	$f_{y2}$	$f_{T1}$	$f_{T2}$
Solução 1	1.113	1.656	1.248	2.324	1.775	4.108
Solução 2	1.361	2.224	1.540	3.050	2.243	5.342
Solução 3	0.620	1.089	0.755	1.718	1.501	3.896
Solução 4	1.028	1.320	1.131	1.768	1.577	3.797
Solução 5	1.127	1.664	1.263	2.392	1.745	3.890

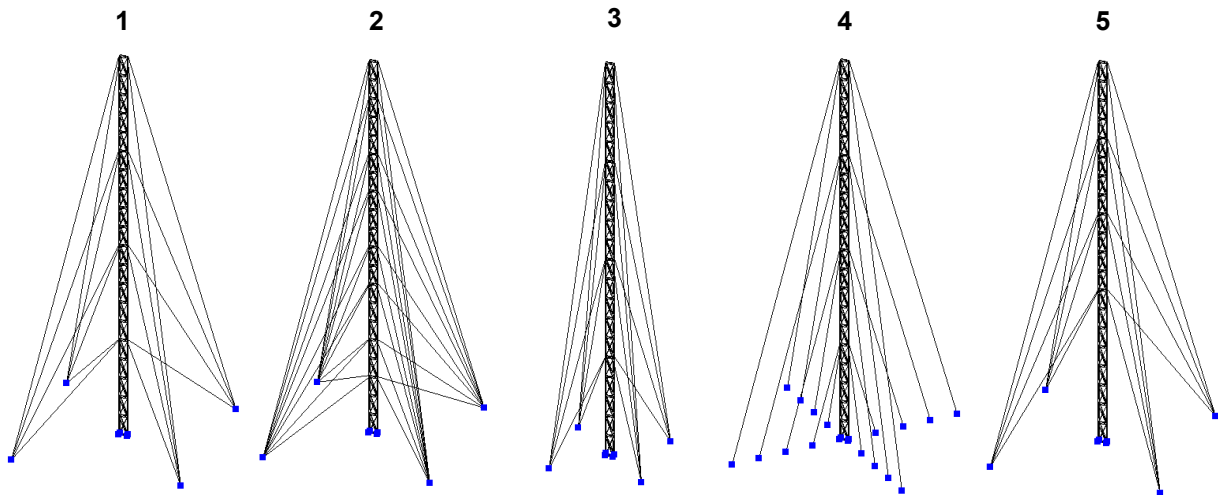


Fig. 6.19 – Diferentes soluções para o mastro atirantado

# 7

## SÍNTESE E CONCLUSÕES

### 7.1. SÍNTESE DO TRABALHO EFECTUADO

Neste trabalho foi desenvolvido um programa de cálculo automático em linguagem Matlab, com a função de analisar estruturas com elementos de treliça e cabos, considerando a análise estática e dinâmica geometricamente não linear. Pretendeu-se que o programa tivesse uma organização e simplicidade suficientes para permitir uma fácil utilização e interpretação dos resultados.

Modelou-se o elemento cabo como um elemento recto, recorrendo ao conceito de módulo de elasticidade equivalente na definição da sua rigidez axial.

Na análise não linear foi considerada a matriz de rigidez geométrica, sendo contabilizado o pré-esforço inicial e as sucessivas deformadas em cada iteração. Para resolver as equações não lineares no programa foram utilizados os métodos iterativos de Newton-Raphson, Newton-Raphson modificado e o método iterativo directo.

O cálculo das frequências e dos modos de vibração corresponde à obtenção de valores e vectores próprios com base na matriz de rigidez e na matriz de massa. No cálculo das frequências lineares é usada a matriz de rigidez inicial inalterada. No cálculo das frequências finais é usada a matriz de rigidez correspondente à última iteração do processo iterativo. O cálculo dos valores e vectores próprios é efectuado com uma função interna do Matlab. Na análise dinâmica foi utilizada a matriz de massa diagonal.

De modo a verificar a viabilidade do programa desenvolvido, foram realizadas diversas análises estáticas e dinâmicas, lineares e não lineares, comparando os resultados obtidos com outros programas. Com a finalidade de analisar o efeito do pré-esforço na modificação da rigidez axial dos cabos, foi analisada uma estrutura com 9 cabos, estudando-se a variação da deformada e das frequências de vibração.

A finalidade do programa desenvolvido é o estudo de estruturas com cabos. De modo a compreender o efeito do pré-esforço e a importância da análise não linear, foram escolhidos dois exemplos: uma ponte atirantada e um mastro espiado. São calculados e representados os deslocamentos e os modos de vibração, e efectuado um estudo paramétrico para ambas as estruturas, onde se consideram diferentes tipos de configuração dos cabos.

No estudo do exemplo da ponte atirantada, são comparadas as frequências obtidas para os diferentes tipos de configurações dos cabos, com os valores regulamentares especificados no capítulo 3.



## 7.2. CONCLUSÕES

Nesta dissertação pretendeu-se desenvolver um programa de cálculo automático que permitisse obter resultados consistentes relativamente à análise estática e dinâmica de estruturas. Observando os resultados obtidos nos testes iniciais elaborados no capítulo 5, pode-se concluir que foi verificada a viabilidade do programa elaborado nesta dissertação, pois estes resultados são semelhantes aos obtidos com outros dois programas.

Nas várias análises efectuadas verifica-se que para as estruturas com cabos é importante dar destaque à não linearidade, de modo a obter uma melhor aproximação do verdadeiro comportamento da estrutura. Este aspecto tem mais importância para maiores comprimentos horizontais do cabo, e quando estes se encontram pouco traccionados. Nestas análises, verificou-se que a maior discrepância entre a análise linear e não linear ocorre para valores de tensão, nos cabos, inferiores a cerca de 30% da sua capacidade máxima.

O estudo de frequências revela-se de grande importância para o caso de pontes pedonais com cabos, pois o seu dimensionamento é bastante influenciado pelas vibrações que esta terá em fase de utilização. Através de algumas alterações na geometria destas pontes é possível evitar problemas que resultam das vibrações provocadas pelos peões, como verificado pelos testes paramétricos elaborados no capítulo 3 e 5. Com a alteração das configurações dos cabos consegue-se obter resultados que se aproximam dos valores aconselhados, respectivamente para as frequências verticais, horizontais e o para o efeito de instabilidade aerodinâmica.

Através da análise não linear foi possível observar que para determinadas combinações de acções se verifica no mastro atirantado uma grande instabilidade estrutural, relativamente à análise linear, sendo de grande importância o estudo destes fenómenos para o seu dimensionamento.

Dos três métodos iterativos aplicados no programa de cálculo automático o que revelou ser mais preciso e rápido foi o de Newton-Raphson.

## 7.3. SUGESTÕES PARA FUTURO DESENVOLVIMENTO

Considerando as diversas limitações do programa elaborado, várias alterações e adições poderiam ser implementadas. Relativamente ao método de introdução dos dados, tudo seria mais eficaz se as operações se realizassem interactivamente, em simultâneo com a visualização da geometria da estrutura. Assim a introdução das coordenadas, forças, elementos e apoios seria facilitada, permitindo a introdução de cargas ao longo de elementos e apoios de rigidez variável.

Relativamente à análise de vibrações, seria de grande utilidade permitir a análise de deslocamentos e acelerações para uma força harmónica como a da equação 3.2, conseguindo deste modo determinar, no caso de pontes pedonais, se os utilizadores sentiriam desconforto ou se provocariam o efeito *lock-in*, entrando em ressonância com a ponte.

Um factor importante seria a adição de novos elementos ao programa, principalmente os elementos de barra e casca. Assim se introduziriam 3 novos graus de liberdade, correspondentes à rotação dos nós, que permitiriam uma melhor modelação do elemento cabo.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] - Buchholdt, H.A. *An introduction to cable roof structures*. Cambridge University Press. Cambridge, 1985.
- [2] - Adriaan Beukers, Ed van Hinte. *Lightness: The Inevitable Renaissance of Minimum Energy Structures*. 010 publishers, Rotterdam, 2005.
- [3] - Hugo Bachmann. *Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines*. Birkhäuser, 1995.
- [4] - K. S. Viridi. *Structural Assessment: The Role of Large and Full-Scale Testing*. Taylor & Francis, 1997.
- [5] - Ernst, H. J. *Der E-Modul von Seilen unter Berücksichtigung des Durchhanges*. Bauingenieur, Number 2, 1965.
- [6] - Gunnar Tibert. *Numerical analysis of cable roof structures*. Royal Institute of Technology, Sweden, 1999.
- [7] - Catálogo de estruturas de cabos da empresa PFEIFER, 2005
- [8] - Jiri Strasky. *Stress ribbon and cable-supported pedestrian bridges*. Thomas Telford, 2005
- [9] - Peter Broughton, Paul Ndumbaro. *The analysis of cable and catenary structures*. Thomas Telford, 1994.
- [10] - Carlos Jorge Trindade da Silva Rente. *Análise estática e dinâmica geometricamente não linear de estruturas atirantadas*. Dissertação de Mestrado, FEUP, Porto, 1994
- [11] - <http://www.pfeifer.de> - Pfeifer Seil & Hebetchnik GMHK. Maio de 2008
- [12] - <http://www.bridonltd.com/> - Bridon International Ltd. Maio de 2008
- [13] - <http://en.structurae.de> - Structurae: International Database and Gallery of Structures. Maio de 2008
- [14] - Young W. Kwon, Hyochoong Bang. *The Finite Element Method using Matlab*. CRC Press, 1997
- [15] - Michael R. Hatch. *Vibration Simulation Using MATLAB and ANSYS*. Chapman & Hall/CRC, 2001
- [16] - Ray W. Clough, Joseph Penzien. *Dynamic of Structures*. Computers & Structures, Inc, 2003
- [17] - Victor E. Saouma. *Matrix Structural Analysis with an Introduction to Finite Elements*. University of Colorado, 1999.
- [18] - Azevedo, A. F. M.; Barros, J. A. O.; Sena Cruz, J.; Gouveia, A. V.. *Software no Ensino e no Projecto de Estruturas*. 3º Congresso Luso-Moçambicano de Engenharia, Agosto de 2003, Maputo, Moçambique, pp. 81-92.

## **ANEXOS**

**A.1. SUBROTINA PRINCIPAL “MAIN.M”**

**A.2. SUBROTINA “COSSENOS.M”**

**A.3. SUBROTINA “DRAWMESH.M”**

**A.4. SUBROTINA “EIGEN.M”**

**A.5. SUBROTINA “IMPORTFILEXLS.M”**

**A.6. SUBROTINA “INTERNAS.M”**

**A.7. SUBROTINA “MASSA.M”**

**A.8. SUBROTINA “MATRIZ\_AA.M”**

**A.9 SUBROTINA “MATRIZ\_D.M”**

**A.10 SUBROTINA “MODIFICACAO.M”**

**A.11SUBROTINA “RIGIDEZ.M”**

**A.12 SUBROTINA “TRANSFORMACAO.M”**



**A.1. ROTINA PRINCIPAL “MAIN.M”**

```

echo off
disp('A processar...')
clear all
tic
% Dados iniciais
importfilexls('input1.xls')
%importacao: element, na_, nb_, P0_, e_, a_, r_, tipo_

importfilexls('input2.xls')
%importacao: Nos, coordx, coordy, coordz, DOFx, DOFy, DOFz, Lx, Ly, Lz

importfilexls('input3.xls')
%importacao: ne, nn, Disp_er, Disp_st, modulo, conv, ampdef, ampmodo

disp('Dados lidos')

for i=1:nn
    coord((i-1)*3+1)=coordx(i);
    coord((i-1)*3+2)=coordy(i);
    coord((i-1)*3+3)=coordz(i);

    DOF((i-1)*3+1)=DOFx(i);
    DOF((i-1)*3+2)=DOFy(i);
    DOF((i-1)*3+3)=DOFz(i);

    L((i-1)*3+1)=Lx(i);
    L((i-1)*3+2)=Ly(i);
    L((i-1)*3+3)=Lz(i);
end

% matrizes e vetores zero iniciais
K=zeros(nn*3,nn*3);
LI=zeros(nn*3,1);
LI0=zeros(nn*3,1);
L=L';
Disp=zeros(nn*3,1);
M=zeros(nn*3,nn*3);
u=0;
v=0;
w=0;

%inicio do ciclo

cicle=1;
t=0;

while cicle==1
    t=t+1;
    if t~=1
        Dispnl(1:nn*3,t-1)=0;
    end

    % inicio do ciclo iterativo

```

```

K=zeros(nn*3,nn*3);
LI=zeros(nn*3,1);
for i=1:ne

    e=1000*e_(i);
    a=a_(i);
    na=na_(i);
    nb=nb_(i);
    xa=coord((na-1)*3+1);
    ya=coord((na-1)*3+2);
    za=coord((na-1)*3+3);
    xb=coord((nb-1)*3+1);
    yb=coord((nb-1)*3+2);
    zb=coord((nb-1)*3+3);
    tipo=tipo_(i);
    P0=P0_(i);

    if conv~=3;
        %Novas coordenadas
        xa=xa+Disp((na-1)*3+1);
        ya=ya+Disp((na-1)*3+2);
        za=za+Disp((na-1)*3+3);
        xb=xb+Disp((nb-1)*3+1);
        yb=yb+Disp((nb-1)*3+2);
        zb=zb+Disp((nb-1)*3+3);
    end

    % deslocamentos em cada coordenada
    dxa=Disp((na-1)*3+1);
    dya=Disp((na-1)*3+2);
    dza=Disp((na-1)*3+3);
    dxb=Disp((nb-1)*3+1);
    dyb=Disp((nb-1)*3+2);
    dzb=Disp((nb-1)*3+3);

    % comprimento
    L0=sqrt((xb-xa)^2+(yb-ya)^2+(zb-za)^2);

    if t==1;
        Le(i)=L0;
    end

    % cossenos

    [lp,mp,np,lq,mq,nq,lr,mr,nr] = cossenos(xa,xb,ya,yb,za,zb,L0);

    % deslocamentos e forças internas no elemento
    u=lp*(dxb-dxa)+mp*(dyb-dya)+np*(dzd-dza);
    v=lq*(dxb-dxa)+mq*(dyb-dya)+nq*(dzd-dza);
    w=lr*(dxb-dxa)+mr*(dyb-dya)+nr*(dzd-dza);

    E=sqrt((L0+u)^2+v^2+w^2)-L0;

```

```

if t~=1;
    P=e*a*E/L0+P0;
else
    P=e*a*E/L0;
end

% Modulo de elasticidade equivalente
if t~=1;
    if tipo==1
        if P<0
            P=0;
            e=0;
        end

        if P>0
            if modulo==1
                e=e*1/(1+((77.0085*L0)^2)/(12*((P/1000)/a)^3));
            end
        end
    end
end

% matriz transformacao

[T1,T2] = transformacao(lp,mp,np,lq,mq,nq,lr,mr,nr);

% matriz AA

[AA] = matriz_AA(L0,u,v,w,E);

% matriz D

[D] = matriz_D(P,v,u,w,L0,E);

% matriz rigidez

[K1,K11,K12,K21,K22,na,nb,K] = rigidez(AA,a,e,L0,D,na,nb,K,T1,T2);

% sistema interno de forças (LI)

[AAa,AAb,LI] = internas(T1,T2,AA,na,nb,P,LI);

if t==2;
    LI0=LI;
end

% fim do ciclo para cada elemento
end

% vector força

if conv==3;
    LI=LI0;
end

```

```
end

UL=L-LI;

% Condições fronteira

[UL,K] = modificacao(DOF,UL,K,Disp,nn);

if t==1;
    K0=K;
end

if t>1

% Deslocamentos  $K*x=L$      $x=inv(K)*L$ 

if conv==2;
    Disp_i=K0\UL;
else
    if t==2;
        Disp_i=K0\UL;
    else
        Disp_i=K\UL;
    end
end

% melhoria de convergencia

for i=1:nn*3
    if Disp_i(i)>=Disp_st
        Disp_i(i)=Disp_st;

    end
    if Disp_i(i)<=-Disp_st
        Disp_i(i)=-Disp_st;

    end
end

% Deslocamentos
Disp_pre=Disp;

if conv==3;
    Disp=Disp_i;
else
    Disp=Disp+Disp_i;
end
Dispnl(1:nn*3,t-1)=Disp;

% Verificação da convergencia
maxdisp=max(abs(Disp_pre-Disp));
true=maxdisp<=Disp_er;

if true==1
    cicle=0;
```



```

end

end
%fim do ciclo

end
disp('Deslocamentos')
disp(Dispnl)

%Analise Dinamica

%calculo da matriz massa (M)

[M] = massa(r_,na_,nb_,M,Le,a,ne);

%calculo dos valores e vectores propios
K_=K0;
[V,w2_,w2,f,fa,fv,fc,fposicao] = eigen (K_,M,nn,DOF);

disp('Frequencias naturais Hz')
disp(fc)

K_=K;
[V,w2_,w2,f,fa,fv,fc,fposicao] = eigen (K_,M,nn,DOF);
disp('Frequencias não lineares Hz')
disp(fc)
V0=V;

toc

%Exportação da deformada e dos modos de vibração para o Drawmesh
for i=1:nn;
    DispXX(i,1)=Dispnl(((i-1)*3)+1,t-1);
    DispYY(i,1)=Dispnl(((i-1)*3)+2,t-1);
    DispZZ(i,1)=Dispnl(((i-1)*3)+3,t-1);
end

j=0;
for i=1:nn;
    if DOFx(i)==1 || DOFY(i)==1 || DOFz(i)==1
        j=j+1;
        nofix(j,1)=[j];
        nofix(j,2)=[i];
    end
    nf=j;
end

%indeformada
nomes3d='Indeformada.s3d';
coordf=[coordx,coordy,coordz];
drawmesh (nomes3d,element,Nos,nn,nf,ne,na_,nb_,coordf,nofix);

%deformada

```

```
nomes3d='Deformada.s3d';
coordf=[coordx+ampdef*DispXX,coordy+ampdef*DispYY,coordz+ampdef*DispZZ];
drawmesh (nomes3d,element,Nos,nn,nf,ne,na_,nb_,coordf,nofix);

%modos de vibração
for j=1:fv;
    mposicao=fposicao(j,1);
    V00=V0(:,mposicao);
    if abs(min(V00))>abs(max(V00))
        V00=V00/min(V00);
    else
        V00=V00/max(V00);
    end

    for i=1:nn;
        ModoXX(i,1)=V00(((i-1)*3)+1,1);
        ModoYY(i,1)=V00(((i-1)*3)+2,1);
        ModoZZ(i,1)=V00(((i-1)*3)+3,1);
    end
    nomes3d = sprintf('Modo %1.0f.s3d',j);

coordf=[coordx+ModoXX*ampmodo,coordy+ModoYY*ampmodo,coordz+ModoZZ*ampmodo];
    drawmesh (nomes3d,element,Nos,nn,nf,ne,na_,nb_,coordf,nofix);
end
disp('ficheiros .s3d criados');
```

**A.2. SUBROTINA “COSSENOS.M”**

```
function [lp,mp,np,lq,mq,nq,lr,mr,nr] = cossenos(xa,xb,ya,yb,za,zb,L0)

lp=(xb-xa)/L0;
mp=(yb-ya)/L0;
np=(zb-za)/L0;

if lp==0 && mp==0
    lq=0;
    mq=0;
    nq=0;

    lr=-np;
    mr=0;
    nr=0;
end

if sqrt(lp^2+mp^2+np^2)==0
    disp('element lenght = 0')
end

if sqrt(lp^2+mp^2)~=0

    lq=-mp/(sqrt(lp^2+mp^2));
    mq=lp/(sqrt(lp^2+mp^2));
    nq=0;

    lr=-lp*np/(sqrt(lp^2+mp^2));
    mr=-mp*np/(sqrt(lp^2+mp^2));
    nr=(sqrt(lp^2+mp^2));
end

end
```

### A.3. SUBROTINA “DRAWMESH.M”

```
function drawmesh (nomes3d,element,Nos,nn,nf,ne,na_,nb_,coordf,nofix)
s3d = fopen(nomes3d,'wt');

fprintf (s3d,'PCA\n');
fprintf (s3d,'%s\n',nomes3d);
fprintf (s3d,'  %1.0f  ',ne);
fprintf (s3d,'%1.0f  ',nn);
fprintf (s3d,'%1.0f\n',nf);

for i=1:ne
    fprintf (s3d,'  %1.0f  ',element(i));
    fprintf (s3d,'%1.0f  ',2);
    fprintf (s3d,'%1.0f  ',na_(i));
    fprintf (s3d,'%1.0f\n',nb_(i));
end

for i=1:nn
    fprintf (s3d,'  %1.0f  ',Nos(i));
    fprintf (s3d,'%6.3f  ',coordf(i,1));
    fprintf (s3d,'%6.3f  ',coordf(i,2));
    fprintf (s3d,'%6.3f\n',coordf(i,3));
end

for i=1:nf
    fprintf (s3d,'  %1.0f  ',nofix(i,1));
    fprintf (s3d,'%1.0f\n',nofix(i,2));
end
fclose(s3d);
```

**A.4. SUBROTINA “EIGEN.M”**

```
function [V,w2_,w2,f,fa,fv,fc,fposicao] = eigen (K_,M,nn,DOF)

[V,w2_]=eig(K_,M);

w2=diag(w2_);

w=sqrt(w2);
f=w/2/pi;

fa=f;
fv=0;

for i=1:nn*3
    if DOF(i)==0
        fv=fv+1;
    end
end

if fv>10
    fv=10;
end

for i=1:fv

    [fb,j]=min(fa);
    fa(j)=1e9;
    fposicao(i,1)=j;
    fc(i,1)=fb;

end
end
```

### A.5. SUBROTINA “IMPORTFILEXLS.M”

```
function importfile1(fileToRead1)

% Importação do ficheiro.
newData1 = importdata(fileToRead1);

% Organizar a informação numa nova estrutura com 1 campo por coluna.
colheaders = genvarname(newData1.colheaders);
for i = 1:length(colheaders)
    dataByColumn1.(colheaders{i}) = newData1.data(:, i);
end

% Criar novas variaveis para introduzir os valores.
vars = fieldnames(dataByColumn1);
for i = 1:length(vars)
    assignin('base', vars{i}, dataByColumn1.(vars{i}));
end
```

### A.6. SUBROTINA “INTERNAS.M”

```
function [AAa,AAb,LI] = internas(T1,T2,AA,na,nb,P,LI)

AAa=T1'*AA';
AAb=T2'*AA';

LI(na:na+2)=LI(na:na+2)+AAa(1:3)*P;
LI(nb:nb+2)=LI(nb:nb+2)+AAb(1:3)*P;

end
```

### A.7. SUBROTINA “MASSA.M”

```
function [M] = massa(r_,na_,nb_,M,Le,a,ne)
%calculo da matriz massa (M)

for i=1:ne
    r=r_(i);
    na=na_(i);
    nb=nb_(i);

    M((na-1)*3+1,(na-1)*3+1)=M((na-1)*3+1,(na-1)*3+1)+r*a*Le(i)/2;
    M((na-1)*3+2,(na-1)*3+2)=M((na-1)*3+2,(na-1)*3+2)+r*a*Le(i)/2;
    M((na-1)*3+3,(na-1)*3+3)=M((na-1)*3+3,(na-1)*3+3)+r*a*Le(i)/2;
    M((nb-1)*3+1,(nb-1)*3+1)=M((nb-1)*3+1,(nb-1)*3+1)+r*a*Le(i)/2;
    M((nb-1)*3+2,(nb-1)*3+2)=M((nb-1)*3+2,(nb-1)*3+2)+r*a*Le(i)/2;
    M((nb-1)*3+3,(nb-1)*3+3)=M((nb-1)*3+3,(nb-1)*3+3)+r*a*Le(i)/2;
end
M=M/1000;
end
```

**A.8. SUBROTINA “MATRIZ\_AA.M”**

```
function [AA] = matriz_AA(L0,u,v,w,E)

AA(1,1)=(L0+u)/(L0+E);
AA(1,2)=v/(L0+E);
AA(1,3)=w/(L0+E);

end
```

**A.9 SUBROTINA “MATRIZ\_D.M”**

```
function [D] = matriz_D(P,v,u,w,L0,E)

D(1,1)=P*(v^2+w^2)/(L0+E)^3;
D(1,2)=-P*v*(L0+u)/(L0+E)^3;
D(1,3)=-P*w*(L0+u)/(L0+E)^3;
D(2,1)=-P*v*(L0+u)/(L0+E)^3;
D(2,2)=P*((L0+u)^2+w^2)/(L0+E)^3;
D(2,3)=-P*v*w/(L0+E)^3;
D(3,1)=-P*w*(L0+u)/(L0+E)^3;
D(3,2)=-P*v*w/(L0+E)^3;
D(3,3)=P*((L0+u)^2+v^2)/(L0+E)^3;

end
```

**A.10 SUBROTINA “MODIFICACAO.M”**

```
function [UL,K] = modificacao(DOF,UL,K,Disp,nn)

for i=1:nn*3
    if DOF(i)==1

        for j=1:nn*3
            UL(j)=UL(j)-K(j,i)*Disp(i);
            K(i,j)=0;
            K(j,i)=0;
        end
        K(i,i)=1e12;
        UL(i)=0;

    end
end

end
```

### A.11 SUBROTINA “RIGIDEZ.M”

```
function [K1,K11,K12,K21,K22,na,nb,K] = rigidez(AA,a,E,L0,D,na,nb,K,T1,T2)

K1=AA'*AA*a*E/L0+D;
K11=T1'*K1*T1;
K12=T1'*K1*T2;
K21=T2'*K1*T1;
K22=T2'*K1*T2;


na=(na-1)*3+1;
nb=(nb-1)*3+1;


K(na:na+2,na:na+2)=K(na:na+2,na:na+2)+K11;
K(nb:nb+2,na:na+2)=K(nb:nb+2,na:na+2)+K12;
K(na:na+2,nb:nb+2)=K(na:na+2,nb:nb+2)+K21;
K(nb:nb+2,nb:nb+2)=K(nb:nb+2,nb:nb+2)+K22;


end
```

### A.12 SUBROTINA “TRANSFORMACAO.M”

```
function [T1,T2] = transformacao(lp,mp,np,lq,mq,nq,lr,mr,nr)

T1(1,1)=-lp;
T1(1,2)=-mp;
T1(1,3)=-np;
T1(2,1)=-lq;
T1(2,2)=-mq;
T1(2,3)=-nq;
T1(3,1)=-lr;
T1(3,2)=-mr;
T1(3,3)=-nr;
T2(1,1)=lp;
T2(1,2)=mp;
T2(1,3)=np;
T2(2,1)=lq;
T2(2,2)=mq;
T2(2,3)=nq;
T2(3,1)=lr;
T2(3,2)=mr;
T2(3,3)=nr;


end
```